Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина



В. С. Рыжий, И. Г. Николенко

Очерки по истории математики первой половины XIX века

Дорогим родственникам
Уклеиным
с любовью и наилучшими пожеланиями
от автора
12.01.2016
[signature]

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. С. Рыжий
И. Г. Николенко

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА

Харьков – 2015

УДК 51 (091)"180/185"
ББК 22.1г
Р 93

Рецензенты:

В. А. Резуненко – кандидат физ.-мат. наук, доцент Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

А. И. Даниленко – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины.

Утверждено к печати решением Ученого совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 4 от 30 марта 2015 года)

Рижий В. С.

Р 93 Нариси з історії математики першої половини XIX століття / В. С. Рижий, І. Г. Ніколенко. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2015. – 220 с.

ISBN 978-966-285-248-6

У нарисах у хронологічній послідовності викладено біографічні відомості та основні досягнення видатних математиків першої половини XIX століття. Подано широку бібліографію з історії математики.

Для викладачів, наукових працівників, а також для аспірантів і студентів математичних спеціальностей.

Рыжий В. С.

Р 93 Очерки по истории математики первой половины XIX века / В. С. Рыжий, И. Г. Николенко. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 220 с.

ISBN 978-966-285-248-6

В очерках в хронологической последовательности изложены биографические сведения и основные достижения выдающихся математиков первой половины XIX века. Приведена обширная библиография по истории математики.

Для преподавателей, научных работников, а также для аспирантов и студентов математических специальностей.

УДК 51 (091)"180/185"
ББК 22.1г

ISBN 978-966-285-248-6

ОТ АВТОРОВ

Настоящая книга представляет собой научное издание, посвященное истории математики первой половины XIX в. Первым взялся за написание истории развития в XIX в. многих математических дисциплин выдающийся немецкий математик Феликс Клейн (1849–1925), будучи с 1886 г. профессором Гёттингенского университета. Его «Лекции о развитии математики в XIX столетии» [140] были впервые опубликованы в 1926 г. на немецком языке и с тех пор многократно переиздавались во многих странах на разных языках. Во введении к своей книге он пишет: «Дать связное изложение того, как математика развивалась в XIX столетии, гораздо более трудно, чем изложить, например, ее развитие в древности и в средние века или же в XVI, XVII и XVIII столетиях. Действительно, если истории математики древних и средних веков приходится иметь дело с еще сравнительно элементарными вещами, а XVI, XVII и XVIII столетия составляют эпоху, по сути своей носящую целостный характер, причем достижения ее благодаря их связям со смежными областями без особого труда понятны и неспециалистам, то обращение к XIX столетию немедленно демонстрирует, насколько с иной ситуацией сталкиваемся мы в этом случае» [140, с. 13].

Литература по истории математики имеется в библиотеках лишь в ограниченном количестве экземпляров, недостаточном для использования в учебном процессе. Это вызвало необходимость издания нами книг [243] (краткий ее вариант [210]) и [234] в качестве учебного пособия «История математики» в двух частях от периода древности и до конца XVIII в. Пособие было адресовано главным образом сту-

дентам-математикам старших курсов и преподавателям математики. Довольно обстоятельное изложение и многочисленные ссылки на литературу, приведенные в тексте к очеркам о выдающихся математиках, делает это пособие интересным и для историков математики. О книге [234], посвященной истории математики XVII и XVIII веков, выдающийся украинский историк математики В. А. Добровольский в письме к нам от 28.08.2011 г. пишет: «Издание этой книги является существенным вкладом украинских историков математики в общий фонд не только учебной, но и научной литературы».

Математика XIX в. слишком обширна и сложна по сравнению с математикой предыдущих периодов, поэтому изложение истории ее развития в учебном пособии имело бы неглубокий характер. Эта наша книга является не учебным пособием, а научным изданием, здесь мы ограничиваемся пока только историей математики первой половины XIX в. В этот период работало как никогда много гениальных математиков (Гаусс, Больцано, Абель, Галуа, Лобачевский, Бояи). Мы уделяем особое внимание их творчеству. Отметим еще, что на русский и украинский языки не переведены книги биографического характера о знаменитом французском математике О. Л. Коши (1789–1857) (например [241] и [242]), их частично заменит очерк о нем, приведенный в нашей книге.

Мы приводим обширный список литературы по истории математики и механики, начиная с периода древности и заканчивая первой половиной XX в. Имеется больше всего литературы по истории математики XIX в. Прежде всего, это три книги «Математика XIX века» [107–109] общим объемом более 800 страниц, продолжающие трехтомную «Историю математики с древнейших времен до начала XIX столетия» [1]. Очень содержательной является книга немецкого математика Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии» [140]. Этому периоду уделено большое внимание в ряде

книг по истории отдельных математических дисциплин [51; 79; 80; 105; 136; 137; 144; 145; 156; 160; 161; 253]. Математике XIX в. посвящена часть учебного пособия К. А. Рыбникова «История математики» [5], а также часть материала книг [2; 3; 7–10; 69]. История развития механики изложена в [157–159]. Имеется много биографической литературы о жизни и творчестве выдающихся математиков и механиков XIX и начала XX вв.

Книга предназначена для преподавателей, научных работников, а также для аспирантов и студентов математических специальностей.

МАТЕМАТИКА
первой половины XIX века

Кратко скажем об основных характерных особенностях математики и математической жизни в первой половине XIX века. Начало XIX в. является поворотным пунктом нового этапа развития математики и по своему значению не уступает революционному сдвигу в математике XVII века. Математика XIX в. переходит на более высокую ступень абстракции. Осуществляется отказ от интуитивных представлений, повышается уровень строгости (аппарат рассуждений «на языке $\varepsilon - \delta$ » в анализе, более четкие формулировки и доказательства, учет возможных условий, при которых справедливы соответствующие результаты). Резко увеличивается объем исследований и публикаций. В первой половине XIX в. возникают новые фундаментальные понятия, которые приводят к коренной перестройке математики (в анализе – непрерывность, сходимость рядов; в алгебре – группа). Подвергаются изменению и обобщению старые понятия и теории (например, в анализе – теория интегрирования и дифференцирования). Создается теория сходимости рядов. Развивается интегрирование в комплексной области. Глубокое изучение эллиптических функций способствовало оформлению теории функций комплексной переменной как науки. Возникают новые геометрические дисциплины: дифференциальная геометрия, неевклидова геометрия, проективная геометрия, а в алгебре – новый раздел: теория Галуа. Развивается алгебраическая геометрия. С использованием аналитических методов развивается теория чисел. Возникает и теория алгебраических чисел. Развиваются анали-

тическая теория дифференциальных уравнений и теория уравнений в частных производных. Дальнейшее развитие получает механика.

Из этого краткого обзора характерных особенностей и достижений математики первой половины XIX в. виден ее действительно революционный характер по сравнению с математикой XVIII в., которая в большой степени продолжала линию развития математики XVII в. Поэтому говорят, что с XIX в. начинается период современной математики. Отметим еще, что с начала XIX в. академии утрачивают монопольное положение в науке. Происходит реформа преподавания, быстро увеличивается число и роль университетов и технических школ. Создаются физико-математические факультеты, на которых преподаватели заодно выполняют и большую научную работу.

Укажем основные математические центры в первой половине XIX в. и наиболее выдающихся их представителей. Крупнейшим центром математической науки и образования с начала XIX в. был Париж, где продолжали еще работать и издавать свои труды выдающиеся математики Ж. Л. Лагранж (1736–1813), Г. Монж (1746–1818), П. С. Лаплас (1749–1827), А. М. Лежандр (1752–1833). О них говорилось в части 2 пособия [234]. С 1811 г. наиболее продуктивно в Париже работал крупнейший французский математик О. Л. Коши (1789–1857). Кроме того, там работали С. Д. Пуассон (1781–1840), Ж. Б. Ж. Фурье (1768–1830) и Ж. В. Понселе (1788–1867). Преждевременно оборвалась в Париже жизнь гениального математика Э. Галуа (1811–1832).

Первая половина XIX в. дала миру гениальных математиков: Н. Х. Абеля (1802–1829) в Норвегии, Б. Больцано (1781–1848) в Чехии (в Праге), Я. Бояи (1802–1860) в Венгрии.

Высокого расцвета достигла уже в первой половине XIX в. математика в Германии, особенно в творчестве гениального математика К. Ф. Гаусса (1777–1855), работавшего в Гёттингене заведующим кафедрой математики в университете и директором астрономической

обсерватории. Г. П. Л. Дирихле (1805–1859) работал сначала в Берлинском университете, а с 1855 г. заведовал кафедрой математики в Гёттингенском университете. К. Г. Я. Якоби (1804–1851) работал в университете г. Кёнигсберг в Германии (ныне г. Калининград в Российской Федерации).

В XIX в. возрождается математика в Великобритании главным образом в творчестве У. Р. Гамильтона (1805–1865) в Дублинском университете, А. Кэли (1821–1895) в Кембриджском университете (с 1863 г.), О. де Моргана (1806–1871) в Лондонском университетском колледже, Дж. Буля (1815–1864) в колледже г. Корк в Ирландии. Дж. Сильвестр (1814–1897) работал в США и Англии (в Оксфорде).

В первой половине XIX в. развивается математика в России в трудах гениального математика Н. И. Лобачевского (1792–1856) в Казанском университете, математика и механика М. В. Остроградского (1801–1862) в Санкт-Петербурге.

В XIX в. увеличилось количество математических журналов, их больше всего было во Франции – в Париже. Первым стал выходить *Journal de l'École polytechnique* (1795), а затем *Annales de Gergonne* (1810–1831), *Bulletin de Férussac* (1826–1831). С 1836 г. стал выходить *Journal de mathématiques pures et appliquées,* основанный Лиувиллем и выходящий и в настоящее время. С 1835 г. издавались еженедельные отчеты заседаний Парижской АН – *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences.*

Математических журналов в Германии было меньше. В первой половине XIX в. прославился *Journal für die reine und angewandte Mathematik* («Журнал чистой и прикладной математики»). Его основал в 1826 г. инженер и математик А. Крелле (Крелль, 1780–1855).

Сделаем еще замечание о некоторых должностях, занимаемых преподавателями вузов в XIX веке. Число таких должностей (штатных и внештатных) регламентировалось Уставом вуза. Штатными являлись

должности ординарного профессора и доцента, а внештатными – экстраординарного профессора и приват-доцента. Ординарных профессоров в вузе полагалось быть столько, сколько там было кафедр. Вместо «заведовать кафедрой» говорилось, что ординарный профессор занимает кафедру, или получил кафедру.

— Гаусс —

В последнем десятилетии XVIII в. начал свою творческую деятельность гениальный немецкий математик, астроном, физик и геодезист **Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)**, работы которого знаменуют начало нового периода в развитии математики. Он родился в г. Брауншвейг, его родители были малообразованные, отец с трудом обеспечивал семью случайными заработками. Математические способности у Гаусса проявились очень рано: он говорил о себе, что «умел считать раньше, чем говорить». Это умение он проявлял и в школе, о чем стало известно правителю княжества герцогу брауншвейгскому, и тот оказал ему материальную помощь для продолжения учебы в гимназии и коллегии (1792–1795), а затем в Гёттингенском университете (1795–1798). Уже в школьные годы Гаусс безудержно экспериментирует с числовым материалом: составляет таблицы квадратичных вычетов и невычетов; выражает в виде десятичных дробей числа вида $\frac{1}{p}$ для p от 1 до 1000 в надежде выяснить зависимость периода десятичной дроби от арифметических свойств числа, причем доводит вычисления до полного периода, состоящего в некоторых случаях из нескольких сотен десятичных знаков; вычисляет приближения с большим числом знаков для арифметико-геометрического среднего чисел a и b (об этом среднем см. далее на с. 43). Одним из его школьных учителей математики был М. Бартельс, впоследствии профессор математики в Ка-

зани, у которого учился и Лобачевский. Считают, что уже в школьные годы Гаусс познакомился с трудами Ньютона, Эйлера и Лагранжа.

В Гёттингенском университете Гаусс увлекся филологией и одновременно упорно занимался математикой. В 1796 г. он открыл, что правильный 17-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, о чем кратко сообщил в печати. Это открытие решило выбор Гаусса в пользу математики, а не филологии. С момента этого открытия непрерывно в течение пяти лет, а затем до 1814 г. с перерывами Гаусс ведет свой «математический дневник», в котором восторженно сообщает о многих из своих открытий в теории чисел, алгебре и анализе, наделяя себя похвальными эпитетами. Ф. Клейн пишет: «Странно и почти трогательно видеть между этими следами неудержимо рвущегося гения проявления добросовестной, доходящей до мелочей ученической работы...», а именно: старательные записи студенческих упражнений в дифференцировании и интегрировании. В то время студенты в Гёттингенском университете пользовались полной академической свободой в выборе и посещении лекций, экзаменов не было, кроме государственного экзамена по окончании университета. Гаусс слушал лекции престарелого Кестнера, но они ему не много дали, разве что побудили заняться теорией параллельных линий. Там же Гаусс подружился со студентом венгром Ф. Бояи, отцом одного из будущих творцов неевклидовой геометрии Я. Бояи. Проведя три года в Гёттингенском университете, Гаусс в 1799 г. оставляет учебу и без диплома возвращается в Брауншвейг.

В 1799 г. выходит диссертационная работа Гаусса, содержащая его первое доказательство основной теоремы алгебры. За эту работу ему заочно была присуждена докторская степень, дающая право на чтение лекций в качестве приват-доцента. Но преподавательская работа была Гауссу не по душе, он стремился к научной работе. В 1801 г. выходит (на латинском языке) главный математический труд Гаусса

«Арифметические исследования», посвященный теории чисел и оказавший большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел и алгебры. Занимаясь астрономией, Гаусс в 1801 г. вычислил элементы орбиты малой планеты Цереры по известным ее нескольким наблюдениям. Появление ее через год в предсказанном Гауссом месте принесло Гауссу всеевропейскую известность. С 1807 г. и до конца жизни Гаусс занимает кафедру математики и астрономии в Гёттингенском университете и должность директора обсерватории в Гёттингене. В 1809 г. выходит главная астрономическая работа Гаусса «Теория движения небесных тел». В 1812–1814 гг. он опубликовал работы, посвященные рядам и дифференциальным уравнениям, а в 1821 г. и 1823 г. – принципу наименьших квадратов. Выходят работы Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827) и «Теория биквадратичных вычетов» (1828, 1832).

Дальнейшие годы жизни Гаусс посвятил интенсивным занятиям астрономией, геодезией, физикой и земным магнетизмом. В год смерти Гаусса в его честь была изготовлена медаль с надписью «король математиков». Слава Гаусса еще более возросла, когда после его смерти были опубликованы его рукописи и дневник, из которых стало ясно, что он глубоко продвинулся в теории эллиптических функций (до Абеля и Якоби) и в неевклидовой геометрии (до Лобачевского и Бояи). После смерти Гаусса его труды были опубликованы в 12 томах.

Первым из достижений Гаусса в математике явилось доказательство возможности построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. В VII разделе «Арифметических исследований» (1801) Гаусс рассмотрел вопрос о том, когда можно построить правильный n-угольник в общем случае. С решением этого вопроса Гауссом можно познакомиться по книге [111, с. 92–101] или учебнику А. К. Сушкевича «Основы высшей алгебры» (М.; Л.: ГИТТЛ, § 219,

220). Построение при $n=17$ имеется также в [71, с. 151–156; 9, с. 161]. Мы кратко рассмотрим схему рассуждений Гаусса в случае $n=17$ и совсем кратко скажем об общем случае. Отметим, что эти результаты он получил в 19-летнем возрасте, будучи студентом университета.

Уравнение $x^n-1=0$ имеет n корней, их можно записать в виде

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}=e^{\frac{2\pi ki}{n}},\ k=0,1,\ldots,n\text{–}1.$$

Оно является циклическим уравнением, т. к. $\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k$. После его сокращения на множитель $x-1$ получается уравнение $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0$. Уравнение $x^n-1=0$ называют уравнением деления окружности (или круга), т. к. его корни изображаются на единичной окружности вершинами правильного вписанного n-угольника. Еще древние греки знали, что квадратичные иррациональности можно построить с помощью циркуля и линейки. Сторона правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, равна $2\sin\frac{\pi}{n}$, поэтому при тех n, для которых она является квадратичной иррациональностью, правильные n-угольники можно построить с помощью циркуля и линейки. Древние математики умели строить с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники с числом сторон n = 3, 4, 5, 15, а также с числом сторон, получающихся последовательным удвоением указанных выше сторон. С тех пор до Гаусса никакого продвижения в этом вопросе не было.

Гаусс сводит задачу построения правильного многоугольника к случаю, когда n – простое число, $n\geq 5$. Далее он использует введенное Эйлером понятие первообразного корня g по простому модулю n, равносильное условию: наименьшие положительные остатки от деления чисел g^l $(l=0,1,2,\ldots,n-2)$ на n образуют совокупность чисел $1,2,\ldots,n-1$ (расположенных в ином порядке),

причем число 1 является остатком от деления g^{n-1} на n, т.е. $g^{n-1} \equiv 1 (\bmod n)$.

В случае $n = 17$ первообразным корнем по модулю 17 является, например, число $g = 3$. Тогда $3^l \equiv k (\bmod 17)$, $l = 0,1,2,\ldots,15$, т. е. $3^l = 17m + k$, где m и k – целые положительные числа. Запишем l и k в виде таблицы

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Таким способом Гаусс производит перенумерацию (подстановку) корней $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi ki}{17}}$ уравнения $x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0$, что можно записать в виде $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_k$, где старые индексы k и новые l связаны зависимостью $3^l \equiv k (\bmod 17)$, т. е. k – остаток от деления 3^l на 17. Поэтому

$$\varepsilon_{[0]} = \varepsilon_1,\ \varepsilon_{[1]} = \varepsilon_3,\ \varepsilon_{[2]} = \varepsilon_9,\ \varepsilon_{[3]} = \varepsilon_{10}, \ldots,\ \varepsilon_{[15]} = \varepsilon_6.$$

Сначала рассматриваются следующие суммы по 8 корней («периоды длины 8» по выражению Гаусса):

$$s_{0,2} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[4]} + \ldots + \varepsilon_{[14]},\quad s_{1,2} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[5]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}.$$

Тогда $s_{0,2} + s_{1,2} = -1$ (как сумма всех корней уравнения $x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0$); $s_{0,2} \cdot s_{1,2} = -4$. Следовательно, по теореме Виета $s_{0,2}$ и $s_{1,2}$ – корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$. Они являются действительными (как и рассматриваемые ниже суммы $s_{p,q}$). Следующими рассматриваются суммы по 4 корня

$$s_{0,4} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[8]} + \varepsilon_{[12]};\quad s_{2,4} = \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[6]} + \varepsilon_{[10]} + \varepsilon_{[14]}$$

и показывается, что $s_{0,4}$ и $s_{2,4}$ – корни уравнения $x^2 - s_{0,2}x - 1 = 0$. Аналогичные суммы

$$s_{1,4} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[5]} + \varepsilon_{[9]} + \varepsilon_{[13]}; \quad s_{3,4} = \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[7]} + \varepsilon_{[11]} + \varepsilon_{[15]}$$

– корни уравнения $x^2 - s_{1,2}x - 1 = 0$. И наконец, следующие суммы пар корней

$$s_{0,8} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[8]}; \quad s_{4,8} = \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[12]}$$

удовлетворяют уравнению $x^2 - s_{0,4}x + s_{1,4} = 0$. Но

$$s_{0,8} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[8]} = \varepsilon_1 + \varepsilon_{16} = e^{\frac{2\pi i}{17}} + e^{\frac{32\pi i}{17}} = e^{\frac{2\pi i}{17}} + e^{-\frac{2\pi i}{17}} = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

Из полученных выше четырех квадратных уравнений видно, что $2\cos\frac{2\pi}{17}$ – квадратичная иррациональность, а тогда и $2\sin\frac{\pi}{17}$ – тоже квадратичная иррациональность, т. к. $2\sin\frac{\pi}{17} = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{17}\right)}$.

Следовательно, правильный 17-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Открытие этого построения не могло быть получено традиционными геометрическими средствами, т. к. оно вскрывало тонкую алгебраическую симметрию циклической группы корней уравнения деления окружности и ее циклических подгрупп. Гаусс очень ценил это свое открытие и даже пожелал, чтобы на его надгробии изобразили правильный 17-угольник. Памятник Гауссу в г. Брауншвейг установлен на постаменте, сечение которого имеет вид правильного 17-угольника.

В общем случае, если $r = \varepsilon_j = e^{\frac{2\pi ji}{n}}$ – какой-либо из корней уравнения $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$, то все его корни можно записать в виде $r, r^2, \ldots, r^{n-1}$. Тогда $r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{n-2}}$ – тоже совокупность всех

корней этого уравнения, причем $r^{g^{n-1}} = r$, где g – первообразный корень по модулю n. Действительно,

$$r^{g^j} = e^{\frac{2\pi ji}{n}(mn+k)} = e^{\frac{2\pi jki}{n}} = r^k\,;\; r^{g^{n-1}} = e^{\frac{2\pi ji}{n}(mn+1)} = r\,,$$

где m – частное от деления g^j на n, а остаток k содержится в совокупности чисел $1,2,\ldots,n-1$. Для наглядности условно можно расположить корни $r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{n-2}}$ на окружности против часовой стрелки так, чтобы они образовали правильный $(n-1)$-угольник P (на рис. 1 это указано для $n=17$, $g=3$).

Далее Гаусс пишет разложение $n-1=ef$ на множители, где $f>2$, и разбивает совокупность корней $r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{n-2}}$ на e классов по f корней так, что соответствующие этим корням вершины многоугольника P образуют правильные f-угольники. Потом он вводит суммы корней, принадлежащих данному классу, с первым слагаемым r^λ и количеством слагаемых, равным f («периоды длины f»).

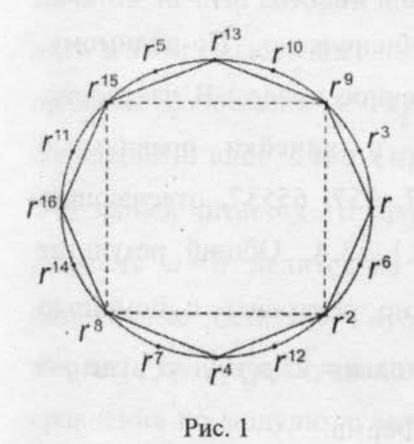


Рис. 1

Такие суммы он обозначает в виде (f,λ). На рис. 1 при $n=17$ указаны классы корней (в вершинах многоугольников), из которых образуются суммы (8, 1) и (4, 9), они отвечают рассмотренным выше суммам $s_{0,2}$ и $s_{2,4}$. Гаусс доказывает для введенных им сумм ряд лемм, из которых получает основную теорему о разложении многочлена $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$ в цепочку многочленов, завершающих решение задачи. Например, при

$n=17$ имеем $n-1=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ и приходится решать четыре квадратных уравнения.

Гаусс находит, что построение правильного n-угольника при простом $n\geq 3$ возможно тогда и только тогда, когда разложение числа $n-1$ на простые множители состоит из одних двоек, следовательно, $n=2^m+1$. Поскольку число n простое, то m не может иметь нечетных множителей, в противном случае число 2^m+1 как сумма нечетных степеней разлагалась бы на множители. Таким образом, $m=2^k$, а число n является простым числом вида $2^{2^k}+1$, где k = 0, 1, 2,…. (Числа $2^{2^k}+1$ называются числами Ферма, который высказал предположение, что они все простые, проверив это для k = 0, 1, 2, 3, 4. Но Эйлер показал, что $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$ делится на 641. С тех пор проверено, в том числе и с помощью ЭВМ, что числа Ферма $2^{2^k}+1$ являются составными и для многих других значений k, но простых чисел Ферма при $k>4$ не обнаружено. По-видимому, простых чисел Ферма имеется только конечное число.) В частности, можно построить с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники с числом сторон 3, 5, 17, 257, 65537, отвечающих числам Ферма, соответственно при $k=0,1,2,3,4$. Общий результат имеет вид: правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда $n=2^q p_1 p_2 \dots p_r$, где q = 0, 1, 2,…, а p_i – различные простые числа Ферма.

Гаусс привел доказательство только достаточности этого критерия, но при этом добавил, что с помощью циркуля и линейки нельзя разделить окружность на n равных частей при $n=7,11,13,19,\dots$

Методы Гаусса решения уравнения деления окружности были восприняты и обобщены Абелем и Галуа в теории разрешимости

уравнений в радикалах и способствовали введению в алгебре понятий группы и поля.

Современное изложение вопроса о построениях с помощью циркуля и линейки, доступное для школьных преподавателей математики, дается в книгах (в первой – на основе теории полей, во второй – без нее):

– Костарчук В. М., Хацет Б. І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. – К.: Рад. школа, 1962. – 127 с.;
– Школьник А. Г. Задача деления круга. – М.: Учпедгиз, 1961. – 75 с.

Свой главный математический труд «Арифметические исследования» (свыше 600 страниц на латинском языке) Карл Фридрих Гаусс опубликовал в 1801 г. в 24-летнем возрасте. Первые четыре раздела здесь посвящены изложению теории сравнений и степенных вычетов, начало которой положили Эйлер и Лагранж. Термин «сравнение» в этом смысле впервые употребил Х. Гольдбах в 1742 г. Преимуществом изложения у Гаусса является введенное им обозначение сравнений в виде $a \equiv b \pmod{m}$ для целых a, b и натурального m. Эта запись читается «a сравнимо с b по модулю m» и означает, что разность $a-b$ делится на m, т. е. a и b при делении на m дают одинаковые остатки. Гаусс показывает, что сравнения обладают многими свойствами, аналогичными свойствам уравнений. Отношение сравнения по модулю m является отношением эквивалентности и разбивает все целые числа на m непересекающихся классов сравнимых между собой чисел. Эти классы называются классами вычетов по модулю m. Р. Дедекинд во второй половине XIX в. ввел понятия кольца и поля. Классы вычетов по модулю m образуют относительно операций сложения и умножения коммутативное кольцо, обозначаемое

в виде $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, а классы вычетов по простому модулю p – поле. Это был первый в истории математики пример конечного поля.

Далее Гаусс рассматривает сравнение первой степени $ax+b\equiv 0$ $(\bmod p)$, второй и высших степеней. Он показывает, что сравнение n-й степени $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Mx+N\equiv 0 \pmod p$, где p – простое, $A\neq 0 \pmod p$, имеет не более чем n несравнимых по модулю p корней. Ранее эта теорема была доказана Лагранжем без использования символа сравнения.

Наиболее детально Гаусс излагает теорию квадратичных вычетов. Число a называется квадратичным вычетом по модулю p, если существует такое целое x, что $x^2\equiv a \pmod p$, в противном случае a называется квадратичным невычетом по модулю p. В части 2 нашего пособия [234] уже говорилось о достижениях Эйлера в этом вопросе. Гаусс доказывает существование первообразного корня по любому простому модулю p. (Вместо термина «первообразный корень по модулю p» говорят также «первообразный корень числа p».) Определение первообразного корня по модулю приведено выше на с. 12, но можно дать и равносильное определение: число a называется первообразным корнем по модулю p, если наименьшее из натуральных чисел n таких, что $a^n\equiv 1 \pmod p$, равно $p-1$. Гаусс вводит понятие индекса γ числа b при основании a по модулю p, а именно: $a^\gamma\equiv b$ $(\bmod p)$, где a – произвольный, но фиксированный первообразный корень по модулю p. В теории сравнений роль индекса аналогична роли логарифма. Гаусс применяет индексы к решению сравнений и строит первые таблицы индексов.

Эйлер первым обнаружил так называемый квадратичный закон взаимности в теории чисел, но не смог его доказать. В очерке об Эйлере в части 2 нашего пособия [234] приводилась формулировка

этого закона в обозначениях Лежандра, опубликовавшего первое, хотя и не полное доказательство этой теоремы. Одной из формулировок квадратичного закона взаимности является следующая. Пусть p и q – различные нечетные простые числа. Тогда:

1) если хотя бы одно из них имеет вид $4n+1$, то $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$, т. е. p – квадратичный вычет по модулю q тогда и только тогда, когда q – квадратичный вычет по модулю p;
2) если числа p и q оба имеют вид $4n+3$, то $\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$, т. е. p – квадратичный вычет по модулю q тогда и только тогда, когда q – квадратичный невычет по модулю p.

Кратко квадратичный закон взаимности формулируют в виде: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$. Гаусс в «Арифметических исследованиях» дал два доказательства этого закона. Первое из них очень громоздкое (рассматривается 8 случаев), но достигается простыми средствами. Гаусс нашел его еще в 18-летнем возрасте, проявив большое упорство, т. к. один из случаев не поддавался ему в течение года. Гаусс назвал квадратичный закон взаимности «фундаментальной», или «золотой», теоремой, а позже в разное время дал еще пять ее доказательств. Многочисленные новые доказательства и обобщения этой теоремы были получены в XIX в. и даже в недавнее время, о чем сообщалось в очерке об Эйлере в части 2 пособия [234].

Центральное место в «Арифметических исследованиях» Гаусса занимает знаменитый V раздел, в котором строится глубокая теория бинарных квадратичных форм вида $ax^2+2bxy+cy^2$, где $a,b,c,x,y\in\mathbb{Z}$, в связи с вопросами о представлении натуральных чисел такими формами. Число M называется представимым

квадратичной формой, если существуют целые числа m и n такие, что $M = am^2 + 2bmn + cn^2$. Вопросами представления натуральных чисел квадратичными формами занимался Ферма в XVII в., а в XVIII в. Эйлер и особенно Лагранж, показавший, что если число M представимо некоторой формой, то оно представимо и многими другими формами, которые он назвал эквивалентными. Каждая из эквивалентных форм получается из исходной формы с помощью замены переменных $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, где α, β, γ, δ – целые числа, удовлетворяющие соотношению $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Кроме того, Лагранж разбил квадратичные формы с данным дискриминантом $b^2 - ac$ на конечное число классов, каждый из которых состоит из эквивалентных между собой форм. Гаусс обозначает квадратичную форму через (a,b,c). Число $D = b^2 - ac$ называют ее определителем, или дискриминантом. При переходе от формы (a,b,c) к форме (a',b',c') с помощью указанного выше линейного преобразования получается, что $b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. Если $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, то определители обеих форм равны, при этом существует обратное преобразование, позволяющее перейти от формы (a',b',c') к форме (a,b,c). Тогда говорят, что эти формы эквивалентны, и это действительно отношение эквивалентности в современном смысле (т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно). Гаусс назвал формы собственно эквивалентными, если $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, и несобственно эквивалентными, если $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. В теории Гаусса главную роль играют классы собственно эквивалентных форм определителя D.

Гаусс дает арифметическую классификацию квадратичных форм данного определителя D. Две квадратичные формы он относит к одному порядку, если их коэффициенты имеют один и тот же наибольший делитель. Формы, у которых коэффициенты a, b, c не

имеют общего делителя, Гаусс называет примитивными, а если при этом также a, $2b$, c не имеют общего делителя, то собственно примитивными. Последние он разбивает на роды в зависимости от разложения определителя D на простые множители, и здесь начинается самое интересное, но и самое трудное. С целью определения числа родов Гаусс вводит композицию классов квадратичных форм.

Пусть форма $F = AX^2 + 2BXY + CY^2$ при помощи целочисленного преобразования

$$X = p_1xx' + p_2xy' + p_3x'y + p_4yy',$$

$$Y = q_1xx' + q_2xy' + q_3x'y + q_4yy'$$

(с условием взаимной простоты шести определителей вида $p_iq_j - p_jq_i$) переходит в произведение форм $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ и $f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Тогда Гаусс называет форму F композицией форм f и f' и обозначает: $F = f * f'$. Некоторые примеры композиции форм были известны и ранее.

Затем Гаусс доказал важную теорему о композиции классов K и K' собственной эквивалентности форм: если формы f и g принадлежат классу K, а f' и g' принадлежат классу K', то композиции $F = f * f'$ и $G = g * g'$ также принадлежат одному и тому же классу собственной эквивалентности K''.

Гаусс называет класс K'' композицией классов K и K' и записывает аддитивно в виде $K'' = K + K'$, давая понять, что здесь важна сама операция (композиция классов), а не ее обозначение. Гаусс проверяет свойства этой операции (в частности ассоциативность, что особенно трудно) и показывает, что композиция классов собственной эквивалентности представляет собой коммутативную группу (не вводя термина «группа»). Нулевым элементом этой группы является главный

класс, отвечающий так называемой главной форме $x^2 - Dy^2$, а противоположными – класс, содержащий форму (a,b,c), и класс, содержащий форму $(a,-b,c)$. В истории математики это был первый пример коммутативной (абелевой) группы с элементами, отличными от числовых. В качестве важнейшего применения своей теоремы композиции Гаусс дает свое второе доказательство квадратичного закона взаимности.

Теория квадратичных форм имеет много общего с созданной в 40-х гг. XIX в. немецким математиком Э. Куммером (1810–1893) теорией «идеальных чисел» (дивизоров). Куммер знал, что теорию бинарных квадратичных форм $ax^2 + 2bxy + cy^2$ $(a,b,c,x,y \in \mathbb{Z})$ можно интерпретировать как теорию чисел вида $x + y\sqrt{D}$ $\left(D = b^2 - ac\right)$, причем эквивалентным дивизорам отвечают гауссовы собственно эквивалентные формы, а классам эквивалентных дивизоров – гауссовы классы эквивалентных форм, и обратно. Такое соответствие устанавливается, например, в § 8.3 книги Г. Эдвардса «Последняя теорема Ферма (Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел)» (М.: Мир, 1980).

Теория классов бинарных квадратичных форм Гаусса имеет аналогию с теорией идеалов, которую построил во второй половине XIX в. немецкий математик Р. Дедекинд (1831–1916). Можно сказать, что Гаусс построил арифметику квадратичных целых, т. е. полей вида $x + y\sqrt{D}$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, но не с помощью введенных позже понятий теории алгебраических чисел, а в малоудобном виде – с помощью квадратичных форм, проведя сложнейшие выкладки в разделе V о композиции форм. В этой же книге Гаусс начал исследовать и тернарные квадратичные формы, т. е. квадратичные формы от трех переменных. Завершается знаменитая книга Гаусса «Арифметические

исследования» разделом VII, в котором решается задача деления окружности, о чем говорилось выше.

Гаусс в разное время дал 4 доказательства так называемой «основной теоремы алгебры». Рассмотрим кратко историю этой теоремы. Первые ее формулировки появились в начале XVII в., в них речь идет о числе корней алгебраического уравнения n-й степени: оно может иметь до n действительных корней (Роте, 1608); оно имеет n корней (включая комплексные, Жирар, 1629); «можно вообразить себе у каждого уравнения столько корней», какова его степень (Декарт, 1637). В то время о комплексных числах знали мало, но уже в XVIII в. было показано, что употребительные операции над ними снова дают комплексное число. Формулировка «основной теоремы алгебры» со временем видоизменялась. Д'Аламбер привел первое доказательство «основной теоремы алгебры», он формулирует ее в виде: каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей. Его доказательство чисто аналитическое и не является строгим. Отметим, что чисто алгебраическое доказательство «основной теоремы алгебры» без какого-либо использования понятия непрерывности невозможно. Алгебраическими называют такие доказательства этой теоремы, в которых свойства непрерывности (и математический анализ вообще) используются в минимальной степени. Первое такое алгебраическое доказательство дал Эйлер в 1751 г. Он принимает как очевидное, что алгебраический многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень. (Долгое время не было строгого доказательства этого утверждения, оно следует из теоремы об обращении непрерывной функции в нуль, первое доказательство которой привел Больцано в 1817 году.) Далее рассуждения Эйлера чисто алгебраические. Он рассматривает теорему в следующей постановке: предпо-

лагается, что алгебраическое уравнение *n*-й степени $P(x)=0$ с действительными коэффициентами можно представить в виде

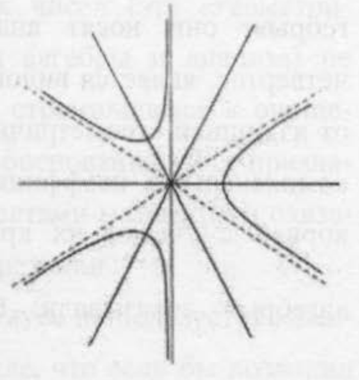
$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – некоторые символы, над которыми можно производить арифметические операции. Требуется доказать, что α_i являются действительными или комплексными числами. Эйлер рассматривает уравнения $P(x)=0$ степени 2^k и представляет их левые части в виде произведения двух многочленов степени 2^{k-1} с действительными коэффициентами, при этом использует теоремы о свойствах рациональной функции от корней уравнения при перестановках корней, в том числе основную теорему о симметрических функциях. В результате последовательных разложений получаются многочлены 2-й степени, а они, как известно, имеют либо комплексные, либо действительные корни. Эйлер проделал это для уравнений 8-й и 16-й степени, общее рассуждение провел Лагранж в 1774 году.

В 1799 г., когда Гаусс, как упоминалось выше, оставил учебу в университете, была опубликована его диссертация, за которую ему присудили докторскую степень. Здесь он подверг критике доказательство Эйлером «основной теоремы алгебры». Гаусс считает некорректным априорное предположение о том, что существуют корни алгебраического уравнения как какие-то неопределенные символы («эти тени теней»), которые непонятно почему можно складывать и умножать. Не отвергая в целом также идею доказательства Д'Аламбером «основной теоремы алгебры», Гаусс указывает на имеющиеся там недостатки.

Гаусс предлагает в диссертации свое первое доказательство «основной теоремы алгебры», оно носит топологический характер. Рассматривая многочлен $f(z)=f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$, где P

и Q – многочлены, Гаусс замечает, что если $f(x_0+iy_0)=0$, то точка (x_0,y_0) лежит на пересечении кривых $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=0$. Фактически он это делает в полярных координатах, полагая $z^k=r^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$. Идею доказательства Гаусса можно пояснить на одном из простейших примеров. Рассмотрим уравнение $f(z)=z^3-1=0$, тогда $z^3-1=(r^3\cos3\varphi-1)+ir^3\sin3\varphi=u+iv$. Кривая $u=0$, т. е. $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos3\varphi}}$, состоит из трех дуг (рис. 2), а кривая $v=0$, т. е. $\sin3\varphi=0$, – из трех прямых, каждая из которых пересекает соответствующую дугу кривой $u=0$. Полученные три точки пересечения соответствуют трем корням $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$, уравнения $z^3-1=0$. Недостатком этого доказательства Гаусс считает его «излишнюю геометричность». Он говорит, что перекрещивающиеся кривые пересекаются, потому что они не прерываются, но не следует этого их свойства непрерывности. (Современное понятие непрерывности тогда еще не было введено.)


Рис. 2

Через 16 лет Гаусс дал второе, алгебраическое доказательство «основной теоремы алгебры». Сначала он устанавливает алгебраическую независимость симметрических функций и выводит отсюда свой так называемый принцип продолжения тождеств. Далее Гаусс предполагает, что «основная теорема алгебры» доказана для всевозможных многочленов степени $2^{k-1}r$, где r – нечетное, и доказывает ее для многочленов степени $2^k r_1$, где r_1 – нечетное. Для этого он путем непро-

стых рассуждений, пользуясь индуктивным предположением и опираясь на некоторые тождества и свойства делимости многочленов, не требующие использования корней уравнения $f(x)=0$, показывает, что многочлен $f(x)$ степени $2^k r_1$, где r_1 – нечетное, делится на некоторый квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Фактически Гаусс выполняет построение поля разложения алгебраического многочлена, т. е. минимального поля, содержащего все корни данного многочлена. Позже построением поля разложения алгебраического многочлена $f(x)\in K[X]$ как поля вычетов по $\mathrm{mod}\, g(x)$, где $g(x)$ – неприводимый многочлен над полем K, занимался Коши (в частном случае $g(x)=x^2+1$, см. ниже с. 91), а затем Кронекер (в общем случае), который отмечает, что он «вычитал» идею такого построения в рассмотренном выше доказательстве Гаусса. При этом не используется существование поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а это поле строится с помощью соответствующих алгебраических конструкций.

Позже Гаусс дал еще два доказательства «основной теоремы алгебры», они носят аналитический характер. Из них последнее, четвертое, является видоизменением первого путем освобождения его от излишней «геометричности», оно дано для уравнения *n*-й степени с комплексными коэффициентами и выявляет сразу существование *n* корней с учетом их кратности. После Гаусса «основную теорему алгебры» доказывали: Коши с помощью интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ в комплексной области, Вейерштрасс с помощью теоремы Лиувилля о том, что целая аналитическая функция комплексной переменной не может быть ограничена по модулю во всей плоскости, если только она не постоянная.

«Основная теорема алгебры» получила свое название в то время, когда основной задачей алгебры было решение уравнений. После

создания современной алгебры, изучающей абстрактные объекты (группы, кольца, поля и др.), эта теорема потеряла свою основную роль и теперь считается не основной теоремой алгебры, а лишь основной теоремой поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел и формулируется в виде: поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

С именем Гаусса связано признание математиками комплексных чисел настоящими числами. Как уже упоминалось в части 2 пособия [234], геометрическая интерпретация комплексных чисел как направленных отрезков на плоскости и правил действий над ними впервые была дана в работе датчанина К. Весселя (написана в 1797 г. и опубликована в 1799 г. на датском языке), а затем в работе швейцарца Р. Аргана (опубликована в 1806 году). Помещенные в малоизвестных журналах, они не сразу были замечены. Работа Весселя стала известна математикам лишь после ее переиздания на французском языке через 98 лет после первого опубликования. Работа Аргана стала предметом дискуссии в 1813–1814 гг. на страницах известного французского математического журнала *Annales de Gergonne*. Однако геометрическая интерпретация комплексных чисел (эта «геометрическая маска», одетая на числа – объекты алгебры и анализа) не импонировала математикам (Сервуа, Коши), стремившимся к очищению анализа и алгебры от геометрических обоснований. Для признания комплексных чисел полноправными объектами математики оказалось недостаточно их геометрической интерпретации.

В «Арифметических исследованиях» Гаусс не пользуется комплексными числами. Позже он говорил Дирихле, что если бы позволил себе ими пользоваться, то композиция квадратичных форм могла быть выполнена очень просто. Во второй из двух статей «Теория биквадратичных вычетов», опубликованной в 1832 г., Гаусс вводит понятие целого комплексного числа $a+bi$, где $a,b \in \mathbb{Z}$, распространяет на такие числа свойства чисел множества $\mathbb{Z}$, т. е. действительных целых

чисел, и строит для целых комплексных чисел арифметику, аналогичную арифметике действительных целых чисел. В настоящее время целые комплексные числа называют гауссовыми, при этом целые числа из $\mathbb{Z}$ часто называют целыми рациональными. Термин «комплексное число» после использования его Гауссом стал общепринятым (ранее он встречается у Л. Карно). Кольцо целых комплексных чисел обозначают $\mathbb{Z}[i]$. Гаусс указывает, что в $\mathbb{Z}[i]$ имеется четыре единицы: $1, -1, i, -i$. Каждому числу $a+bi$ из $\mathbb{Z}[i]$ Гаусс сопоставляет его «норму» $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, т. е. квадрат модуля (термин «модуль» для комплексных чисел ввел Арган, а затем использовал Коши). Простыми комплексными числами Гаусс называет такие, которые нельзя разложить в произведение двух сомножителей, отличных от единиц. При этом простые числа из $\mathbb{Z}$ могут быть составными в $\mathbb{Z}[i]$, например, $2=(1+i)(1-i)$; $5=(1+2i)(1-2i)$. Уже Ферма знал, что все простые числа в прогрессии $4n+1$, $n\in\mathbb{N}$, представимы в виде суммы двух квадратов, а простые числа в прогрессии $4n+3$ не допускают такого представления. Поэтому простые числа в $\mathbb{Z}$ вида $4n+1$ являются составными в $\mathbb{Z}[i]$, т. к. $k^2+m^2=(k+mi)(k-mi)$, а простые числа в $\mathbb{Z}$ вида $4n+3$ будут простыми и в $\mathbb{Z}[i]$. Гаусс доказал теорему: число $a+bi$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, является простым в $\mathbb{Z}[i]$ тогда и только тогда, когда его норма является простым числом в $\mathbb{Z}$. Это позволяет Гауссу дать описание всех типов простых комплексных чисел. С помощью алгоритма Евклида в $\mathbb{Z}[i]$ находится наибольший общий делитель двух чисел. Затем Гаусс доказывает теорему о том, что всякое число в $\mathbb{Z}[i]$ разлагается и притом единственным способом на простые сомножители.

Далее Гаусс дает геометрическую интерпретацию комплексных чисел как точек плоскости и алгебраических операций над ними.

Целые комплексные числа образуют «решетку», находясь в вершинах квадратов, на которые разбивается плоскость. Гаусс вводит вычеты по комплексному модулю и дает им геометрическую интерпретацию. Кроме того, он доказывает для целых комплексных чисел малую теорему Ферма, вводит для них первообразные корни и индексы. Эту теорию он применяет для доказательства биквадратичного закона взаимности в отдельных случаях. В общем виде биквадратичный закон взаимности доказали Якоби и Эйзенштейн в 40-х гг. XIX в. Под влиянием рассматриваемой работы Гаусса Эйзенштейн, Дирихле и Эрмит независимо друг от друга в 40-х гг. дали определение целых алгебраических чисел как корней алгебраического уравнения с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Впечатление от этой работы Гаусса было огромное. Комплексные числа получили всеобщее признание, а идеи Гаусса послужили стимулом для создания коммутативной алгебры, изучающей свойства полей, коммутативных колец и связанных с ними объектов.

Гауссу принадлежат важные результаты в дифференциальной геометрии, которой он занимался в связи с многолетней геодезической практикой. В части 2 пособия [234] говорилось об исследованиях Эйлера и Монжа в дифференциальной геометрии. Эйлер ввел понятие главных кривизн для нормальных сечений поверхности, а также понятие развертывающейся поверхности (т. е. такой поверхности, которую можно изометрически наложить на плоскость). Введя на поверхности криволинейные координаты t , u , он записывает условие развертывания поверхности, а позже устанавливает и общее условие наложения одной поверхности на другую. Он же первым опубликовал и дифференциальное уравнение геодезических линий на поверхности, ранее аналогичное уравнение нашел И. Бернулли. Результаты по развертыванию поверхностей и по геодезическим принадлежат так

называемой внутренней геометрии поверхностей, которая изучает свойства поверхностей, не меняющиеся при изгибании поверхности. Детальное изучение линейчатых и развертывающихся поверхностей, как уже говорилось в части 2 пособия [234], предпринял Монж, он же ввел понятие линий кривизны и привел их теорию.

Отметим здесь некоторые результаты в дифференциальной геометрии, полученные учениками Монжа по Политехнической школе. Современные определения кривизны и кручения кривой появляются у О. Л. Коши (1779–1857) в «Лекциях о приложениях исчисления бесконечно малых к геометрии» (1826). **Оленд Родриг (1794–1851)**, математик и социалист-утопист, в работе 1815 г. получил связанные с линиями кривизны и носящие его имя формулы, которые в современной записи можно передать в виде: $n_u = -k_1 r_u$, $n_v = -k_2 r_v$ для поверхности $r = r(u,v)$, если параметры u, v взяты вдоль линий кривизны, n – единичный вектор нормали к поверхности в точке M, а k_i – главные кривизны в точке M. Используя так называемое сферическое изображение поверхности, Родриг раньше, чем Гаусс, рассматривает предел отношения площадей соответствующих областей единичной сферы и поверхности, когда область на поверхности стягивается в точку, и показывает (в случае поверхности вида $z = z(x, y)$), что этот предел равен произведению главных кривизн.

Шарль Дюпен (1784–1873), морской инженер, а затем главный инженер французского флота, с 1834 г. – морской министр, внес значительный вклад в дифференциальную геометрию. Около 1807 г. он доказал теорему: поверхности тройной ортогональной системы пересекаются по линиям кривизны. В частности, эллипсоид пересекается с софокусными ему однополостными и двуполостными гиперболоидами по линиям кривизны, ранее изучавшимися Монжем. Дюпен предложил рассматривать в касательной плоскости к поверхности

линию (индикатрису Дюпена, или индикатрису кривизны), позволяющую наглядно представить поведение кривизны нормальных сечений поверхности в данной точке. Это дало ему возможность классифицировать точки поверхности на три типа: эллиптический, гиперболический и параболический. Дюпен ввел понятие асимптотических линий на поверхности (вдоль них нормальная кривизна равна нулю), а также сопряженных линий на поверхности.

Гауссу принадлежат большие заслуги в дифференциальной геометрии. Его работа о конформном отображении одной поверхности на другую получила премию Копенгагенского ученого общества в 1823 году. Основополагающее значение для дифференциальной геометрии имела работа Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827). Здесь Гаусс пользуется в основном параметрическим уравнением поверхности $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, только вместо u, v пишет p, q. Глубоко изучив квадратичные формы в «Арифметических исследованиях», он вводит и в дифференциальную геометрию первую квадратичную форму поверхности $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ и вторую квадратичную форму, которая в настоящее время записывается в виде $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ и лишь отсутствием множителя $\sqrt{EG - F^2}$ отличается от рассматриваемой Гауссом. Используя сферическое изображение, Гаусс, как и Родриг, но, по-видимому, независимо от него получает «меру кривизны» K и показывает, что $K = k_1 k_2$, где k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности. После широкого использования Гауссом эта величина была названа гауссовой кривизной. В случае общей параметризации поверхности Гаусс получает формулу для K, отличающуюся лишь обозначениями от современной ее записи в виде $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$.

Путем весьма искусных вычислений Гауссу удается получить выражение для «меры кривизны K» через коэффициенты E, G, F первой квадратичной формы и их первые и вторые производные. Отсюда Гаусс выводит свою теорему, названную им выдающейся (egregium): «если кривая поверхность будет развернута на любую другую поверхность, то при этом мера кривизны в каждой ее точке остается неизменной». Он указывает «новое и плодотворное поле» в дифференциальной геометрии – внутреннюю геометрию поверхностей (не вводя этого термина), которая должна изучать свойства фигур на поверхностях, сохраняющиеся при изгибании поверхностей, т. е. при изометрическом отображении поверхностей. Теорема egregium Гаусса показывает, что гауссова кривизна принадлежит внутренней геометрии, о чем Гаусс упоминает. К внутренней геометрии относятся углы, площади, геодезические. Гаусс нашел уравнения геодезических в криволинейных координатах, а также рассмотрел полугеодезическую систему координат на поверхности, т. е. ортогональную систему координатных линий, одно семейство которых состоит из геодезических. Большое значение имели выведенные Гауссом деривационные формулы, которые выражают производные векторов r_u, r_v, n через эти векторы и коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Аналогичную роль для пространственных кривых играют формулы, которые получили французские математики Ж. Ф. Френе (1816–1900) в 1847 г. и Ж. А. Серре (1819–1885) в 1851 г. Гауссу принадлежит также замечательная теорема о сумме углов геодезического треугольника: $A+B+C-\pi = \iint K d\sigma$, где интеграл $\iint K d\sigma$, названный Гауссом «полной кривизной», есть площадь сферического изображения геодезического треугольника. Эта теорема является частным случаем так называемой теоремы Гаусса–Бонне, установленной позже в общем случае французским математиком **О. П. Бонне (1819–1892)**. Таким

образом, Гаусс является основателем общей теории поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E^3 и, в частности, внутренней геометрии таких поверхностей.

Значительный вклад во внутреннюю геометрию поверхностей в E^3 внес **Фердинанд Готлибович Миндинг (1806–1885)**. Он работал сначала в Берлине, а затем принял русское подданство и в течение 40 лет состоял профессором на кафедре прикладной математики и механики в Дерптском (ныне Тартуском) университете в Эстонии. В 1830 г. он ввел величину, позже названную Бонне геодезической кривизной, и показал, что она принадлежит внутренней геометрии. Ряд важных результатов Миндинг получил в теории изгибания поверхностей в работах 1838–1839 годах. В частности, он доказал, что совпадение гауссовых кривизн в случае их постоянства на двух поверхностях является также и достаточным условием наложимости одной поверхности на другую, причем наложение может быть выполнено бесконечным числом способов. Кроме того, Миндинг находит и исследует поверхности постоянной гауссовой кривизны. В частности, он впервые рассматривает поверхность отрицательной кривизны, полученную вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 3). Позже Бельтрами назвал эту поверхность псевдосферой и интерпретировал на ней геометрию Лобачевского. В работе 1840 г. Миндинг нашел тригонометрические соотношения в треугольнике, образованном геодезическими линиями на поверхностях отрицательной кривизны, и заметил, что эти формулы могут быть получены из формул сферической тригонометрии заменой радиуса R сферы мнимым радиусом Ri (см. также ниже с. 156). О Миндинге: [251].

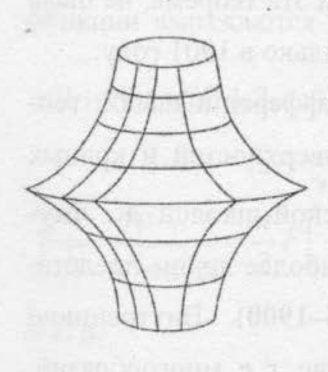


Рис. 3

Дифференциальной геометрией поверхностей занимался и ученик Миндинга **Карл Михайлович Петерсон (1828–1881)**. Он был сыном латышского крестьянина, работал в Дерпте и Москве, является одним из основателей московской геометрической школы. Он дополнил уравнение Гаусса, связывающее коэффициенты первой и второй квадратичной форм поверхности, еще двумя независимыми уравнениями. Позже эти два уравнения были получены итальянскими математиками Майнарди и Кодацци. Петерсон доказал теорему: если две квадратичные формы (первая из которых положительно определенная) удовлетворяют указанным трем уравнениям, то существует и притом единственная с точностью до движения поверхность, для которой эти квадратичные формы являются соответственно первой и второй квадратичными формами. Эта теорема носит имя Бонне, доказавшего ее через 14 лет после Петерсона и опубликовавшего в 1867 году. Диссертация Петерсона, в которой была доказана эта теорема, не была опубликована в XIX в. и получила известность только в 1901 году.

Начиная с середины XIX в. развитие дифференциальной геометрии, и собственно внутренней геометрии поверхностей и кривых в E^3, связано также с французской геометрической школой **Ж. Лиувилля (1809–1882)** и с итальянской школой. Наиболее ярким представителем последней был **Э. Бельтрами (1835–1900)**. Внутреннюю геометрию поверхностей в n-мерном пространстве, т. е. многообразий, разрабатывал немецкий математик **Б. Риман (1826–1866)**, позже она получила название римановой геометрии. История дифференциальной геометрии до XX ст. изложена в [105].

О том, что Гаусс первым в XIX в. получил основополагающие результаты в неевклидовой геометрии, но не публиковал их, речь идет ниже на с. 165–168.

Свои исследования в области математического анализа (в том числе касающиеся функций комплексной переменной) Гаусс имел

намерение изложить в большом труде, но помешала занятость другими делами. Он опубликовал работы, посвященные гипергеометрическому ряду (1813), приближенному методу вычисления определенных интегралов в связи с вычислениями вековых возмущений планет (1814, 1818), а также обоснованию метода наименьших квадратов (1821, 1823). Чисто аналитической здесь является только работа 1813 г. о гипергеометрическом ряде

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

.

Название «гипергеометрический ряд» связано с тем, что при $\alpha=1$, $\beta=\gamma$ это геометрический ряд $1+x+x^2+\ldots$. О важной роли гипергеометрической функции в математике говорит тот факт, что очень многие функции выражаются через нее, например: $(1+x)^m=F(-m,\beta,\beta,-x)$; $\ln(1+x)=xF(1,1,2,-x)$; $\arcsin x=xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)$; $\operatorname{arctg}x=xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right)$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right);\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)$$

и т. д.

Гипергеометрический ряд впервые встречается у Эйлера во втором томе «Интегрального исчисления» (1769), где дается представление $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ в виде определенного интеграла, а также показывается, что $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ является решением дифференциального уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

(при $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$). **Иоганн Фридрих Пфафф (1765–1825)**, один из учителей Гаусса, профессор в университете в Хельмштадте и Галле, посвятил этому ряду главу своей книги «Аналитические исследования» (1797). Но Эйлер и Пфафф не исследовали этот ряд на сходимость. Особое значение для математического анализа работы Гаусса 1813 г. о гипергеометрическом ряде в том, что Гаусс находит интервал сходимости $|x|<1$ этого ряда и исследует сходимость на конце $x=1$, используя свой признак сходимости ряда. Это был первый в истории математического анализа пример исследования сходимости степенного ряда в конце интервала сходимости. Поэтому естественно, что Гаусс не выделяет свой признак сходимости из рассуждений с тем, чтобы придать ему характер общей теоремы. Гаусс находит, что при $x=1$ гипергеометрический ряд сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$. Вопрос об абсолютной и условной сходимости в то время не ставился. Случай $x=-1$ Гаусс не исследует. При $\gamma-\alpha-\beta>0$ он устанавливает формулу

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

где через $\Pi(z)$ обозначена функция Эйлера $\Gamma(z+1)$. В доказательстве он использует почленный переход к пределу в степенном ряде, но без достаточного обоснования. Только Абель в 1826 г. в общем виде решил вопрос о законности почленного перехода к пределу в степенных рядах, установив теорему, которая носит название второй теоремы Абеля. Функцию $\Pi(z)$ Гаусс определяет в виде

$\Pi(z)=\lim\limits_{k\to\infty}\Pi(k,z)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot k^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}$. Аналогично Эйлер

представлял $z!$, но без обоснования, а Гаусс намечает обоснование предельного перехода. Далее Гаусс дает иное представление для

$\Pi(z)$, изучает ее свойства, вводит и исследует функцию $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Pi(z)$. В 1866 г., уже после смерти Гаусса, была опубликована еще одна его работа о гипергеометрическом ряде, в которой продолжается изучение свойств функции $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ с помощью различных ее преобразований, причем эта функция рассматривается как решение гипергеометрического уравнения. Гаусс исследует эту функцию при действительных значениях ее аргументов, а для комплексного x отмечает ее многозначность. Изучению ее как решения гипергеометрического уравнения в комплексных областях (не только в единичном круге) в XIX в. были посвящены работы немецких математиков Куммера, Вейерштрасса, Римана, Фукса, Шварца и Клейна, причем Клейн подвел итог этим исследованиям своими «Лекциями о гипергеометрической функции» (1893–1894).

В области анализа на протяжении всего XIX в. большое место занимала разработка теории эллиптических функций, ей уделили внимание многие из выдающихся математиков (Гаусс, Абель, Якоби, Эйзенштейн, Лиувилль, Вейерштрасс, Брио и Буке и др.). Этой теории предшествовало построение во второй половине XVIII в. теории эллиптических интегралов (Фаньяно, Эйлер, Лежандр), о чем уже говорилось в части 2 пособия [234]. Теорию эллиптических функций, являющихся обратными к эллиптическим интегралам или связанных с таким обращением, впервые начал разрабатывать Гаусс в 1797 г. в 20-летнем возрасте, когда после решения задачи деления окружности на 17 равных частей он начал рассматривать задачу деления лемнискаты. Эллиптическими функциями он продолжал заниматься и в первом десятилетии XIX в. В 1808 г. он писал своему другу и ученику Шумахеру: «Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых и в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями». При жизни он ничего не публиковал

из полученных в этой области результатов, о них стало известно лишь из посмертных публикаций его рукописей и дневника. Гаусс собирался написать большой труд об эллиптических функциях, но в 20-х гг. XIX в. эту тематику начали усиленно разрабатывать Абель и Якоби, сразу же и публиковавшие свои результаты. В 1828 г. Гаусс пишет Крелле: «Поскольку Абель продемонстрировал такую проницательность и такое изящество в вопросах изложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опубликования полученных мной результатов» [115, с. 234].

В настоящее время теория эллиптических функций относится к разделу специальных функций теории функций комплексной переменной и не является непременным элементом высшего математического образования. В XIX в. положение было иным: теория эллиптических функций занимала одно из главных мест в математике и математическом образовании в университетах, способствуя формированию общей теории функций комплексной переменной.

Дадим представление о том, как Гаусс подошел к разработке теории эллиптических функций. По аналогии с функцией $x = \sin u$ как обратной к интегралу $u = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$, Гаусс вводит лемнискатический (лемнискатный) синус как функцию, обратную эллиптическому интегралу, выражающему длину дуги лемнискаты, а затем вводит и другие эллиптические функции и строит их теорию, несколько напоминающую теорию тригонометрических функций комплексной переменной, но намного более сложную и богатую по содержанию полученных результатов.

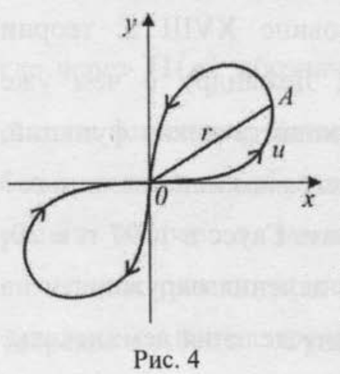


Рис. 4

Гаусс рассматривает в полярных координатах лемнискату $r=\sqrt{\sin 2\varphi}$ (рис. 4). Ее дугу $u=\breve{OA}$ для $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ можно выразить в зависимости от длины радиус-вектора r при помощи замены $\varphi=\varphi(r)=\frac{1}{2}\arcsin r^2$ следующим образом:

$$u=\int_0^{\varphi}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi=\int_0^{r}\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^2}\,\varphi'(r)dr=$$

$$=\int_0^{r}\sqrt{\left(r\varphi'(r)\right)^2+1}dr=\int_0^{r}\sqrt{\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^4}}\right)^2+1}dr=\int_0^{r}\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Итак, длина лемнискаты (в пределах одной ее четверти) выражается эллиптическим интегралом $u=\int_0^{r}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, а $r=r(u)$ представляет обратную этому интегралу функцию, ее Гаусс называет лемнискатическим синусом. Используется краткое обозначение $r=\mathrm{sl}\,u$, или более длинное $r=\sin\mathrm{lemn}\,u$. Половину дуги одной петли лемнискаты, получающуюся при возрастании r от 0 до 1, обозначают $\frac{\omega}{2}=\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Функция $\mathrm{sl}\,u$ определена как обратная эллиптическому интегралу $u=\int_0^{r}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ при $u\in[0,\frac{\omega}{2}]$. На $[\frac{\omega}{2},\omega]$ Гаусс продолжает $\mathrm{sl}\,u$ симметрично относительно $u=\frac{\omega}{2}$. На второй петле лемнискаты Гаусс по определению считает функцию $\mathrm{sl}\,u$ отрицательной и полагает здесь $\mathrm{sl}(\omega+u)=-\mathrm{sl}\,u$, $u\in[0,\omega]$. Далее функция $\mathrm{sl}\,u$ продолжается на всю числовую ось как нечетная, периодическая с периодом 2ω, который играет роль, аналогичную минимальному периоду 2π для

функции $\sin u$, а график функции $\operatorname{sl} u$ напоминает график $\sin u$. Лемнискатический косинус Гаусс вводит, полагая $\operatorname{cl} u = \operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - u\right)$, это четная, периодическая функция с периодом 2ω, а ее график напоминает график $\cos u$.

В основе тригонометрии лежат формулы для $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, которые называются также теоремами сложения. Имеются их аналоги и для эллиптических функций. Используя найденный Эйлером алгебраический интеграл дифференциального уравнения вида $\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} + \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = 0$, Гаусс находит теорему сложения для лемнискатического синуса в виде

$$\operatorname{sl}(\alpha+\beta) = \frac{r\sqrt{1-\rho^4} + \rho\sqrt{1-r^4}}{1+r^2\rho^2},$$

где $r = \operatorname{sl}\alpha$, $\rho = \operatorname{sl}\beta$. Теперь можно определить лемнискатический синус как функцию комплексной переменной $x+iy$. Пусть $\eta = \operatorname{sl} y$, тогда $\int\limits_0^{i\eta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = i\int\limits_0^{\eta} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = iy$, откуда $\operatorname{sl} iy = i\eta = i\operatorname{sl} y$. При $\alpha = x$, $\beta = iy$ теорема сложения принимает вид

$$\operatorname{sl}(x+iy) = \frac{\xi\sqrt{1-\eta^4} + i\eta\sqrt{1-\xi^4}}{1-\xi^2\eta^2},$$

где $\xi = \operatorname{sl} x$, $\eta = \operatorname{sl} y$. Таким образом, функция $\operatorname{sl} z$, где $z = x+iy$, имеет бесконечное число полюсов (при $|\operatorname{sl} x| = 1$, $|\operatorname{sl} y| = 1$). В этом ее коренное отличие от функции $\sin z$, которая является целой функцией, т. е. аналитической функцией, не имеющей конечных особых точек. Кроме того, функция $\sin z$ имеет один действительный наименьший период 2π, а функция $\operatorname{sl} z$, кроме действительного периода 2ω, имеет

еще чисто мнимый период $2\omega i$, т. е. является двоякопериодической. Действительно, из теоремы сложения для $\mathrm{sl}(x+iy)$ видно, что эта функция не меняется при замене x на $x+2\omega$ или y на $y+2\omega$. Для комплексных z вводится лемнискатический косинус $\mathrm{cl}\,z \overset{def}{=} \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)$.

В формуле для $\mathrm{sl}(\alpha+\beta)$, справедливой уже и для комплексных α, β, положим $\alpha=\frac{\omega}{2}$, $\beta=-z$ и учтем, что $\mathrm{sl}\frac{\omega}{2}=1$, получим $r=1$, $\rho=-\mathrm{sl}z$,

$$\mathrm{cl}\,z=\mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}^4 z}}{1+\mathrm{sl}^2 z}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{sl}^2 z}{1+\mathrm{sl}^2 z}},$$

где значение корня следует брать так, чтобы при $z=0$ было $\mathrm{cl}\,0=1$. Тогда также и $\mathrm{sl}\,z=\sqrt{\frac{1-\mathrm{cl}^2 z}{1+\mathrm{cl}^2 z}}$. Эти соотношения можно записать в симметричном виде $\mathrm{sl}^2 z+\mathrm{cl}^2 z+\mathrm{sl}^2 z\cdot \mathrm{cl}^2 z=1$. Кроме теоремы сложения для лемнискатического синуса, получается и теорема сложения для косинуса, причем правым частям можно придать такой вид, чтобы туда входили лемнискатические синусы и косинусы. Из выражения для $\mathrm{sl}(x+iy)$ видно, что все нули этой функции содержатся в формуле $m\omega+in\omega$, а все полюсы – в $(2m-1)\frac{\omega}{2}+i(2n-1)\frac{\omega}{2}$, где $m,n\in\mathbb{Z}$. Используя нули и полюсы функции $\mathrm{sl}\,z$, Гаусс строит целые периодические функции $P(z)$ и $Q(z)$ в виде быстро сходящихся бесконечных произведений такие, что $\mathrm{sl}\,z=\frac{P(z)}{Q(z)}$. Полагая $z=\omega\psi$, он находит разложения $P(\omega\psi)$ и $Q(\omega\psi)$ в тригонометрические ряды. То же он делает и для $\mathrm{cl}\,z$. Полученные четыре тригонометрических

ряда представляют собой в данном частном случае с точностью до числовых множителей так называемые тэта-функции, введенные позже Якоби в общей теории эллиптических функций.

По аналогии с лемнискатическим синусом Гаусс в 1799 г. для общего эллиптического интеграла первого рода $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu^2 x^2)}}$ вводит обратную функцию $x = S(u)$, которую называет «универсальнейшим лемнискатическим синусом» (при $\mu^2 = 1$ это $x = \mathrm{sl}\, u$, а при $\mu = ik$ получается введенный позже эллиптический синус Якоби $x = \mathrm{sn}(u,k)$). Гаусс разлагает функцию $x = S(u)$ в тригонометрический ряд, а также представляет в виде отношения двух целых периодических функций. Функция $x = S(u)$ – двоякопериодическая, один из двух ее основных периодов действительный, а другой – чисто мнимый. Позже, после работы Лиувилля 1847 г., эллиптической функцией стали называть любую двоякопериодическую мероморфную функцию. Мероморфной (дробной) функцией называется функция $f(z)$, которую можно представить в виде отношения двух целых функций, т. е. в виде отношения аналитических функций, не имеющих конечных особых точек. Например, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ являются целыми, функции $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$, $\sec z$, $\mathrm{cosec}\, z$ – мероморфными, но не эллиптическими, т. к. каждая из них имеет лишь один основной период. Из заметок в наследии Гаусса видно, что он впервые выполнял так называемое умножение (и обратную операцию – деление) эллиптических функций, когда умножаются (делятся) не сами функции, а выполняются линейные преобразования их периодов с целыми коэффициентами и отличным от нуля определителем. На комплексной плоскости это означает преобразования решеток, образуемых параллелограммами периодов двоякопериодических функций.

Выше упоминалось, что уже в школьные годы Гаусс забавлялся вычислениями, связанными с арифметико-геометрическим средним. Так называется общий предел $M(a,b)$ двух последовательностей a_n, b_n, которые определяются следующим образом: $a_0 = a$, $b_0 = b$ $(a > b > 0)$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Впервые арифметико-геометрическое среднее использовал Лагранж в 1785 году. Как известно, длина дуги лемнискаты выражается через эллиптический интеграл I рода в форме Лежандра. Гаусс уже в юности умел выражать ее через $M(a,b)$. В 1800 г. он установил, а в 1818 г. опубликовал формулу

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2\pi}{M(a,b)},$$

из которой получается выражение полного эллиптического интеграла через $M(a,b)$. Применяя арифметико-геометрическое среднее к некоторым рядам, Гаусс получает первый в истории математики пример так называемой модулярной функции. Это понятие возникло позже и определяется следующим образом: модулярной функцией называется однозначная аналитическая в полуплоскости функция $\varphi(z)$, не изменяющаяся под действием на ее аргумент z группы дробно-линейных преобразований $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ с целыми a, b, c, d и определителем $ad - bc = 1$. Модулярная функция Гаусса имеет вид $\dfrac{P^2(x)}{Q^2(x)}$, где

$$P(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots,$$
$$Q(x) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \ldots, (x = \sigma + i\tau,\ |x| < 1).$$

Подобные ряды ранее встречались у Я. и Д. Бернулли и Эйлера. Гаусс делает замену $x = e^{-\pi t}$ и решает уравнение $\frac{P^2(t)}{Q^2(t)} = \frac{m}{n}$ с целыми $m > n$. Он находит корень t этого уравнения в виде отношения двух арифметико-геометрических средних, или, что равносильно, в виде отношения $t = \frac{K'}{K}$ полных эллиптических интегралов с модулями k' и k, где $k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{m}{n}$ (определения полных эллиптических интегралов см. в очерке о Лежандре в части 2 нашего пособия «История математики» [234]). Другие корни, по утверждению Гаусса, получаются из найденного с помощью соответствующего дробно-линейного преобразования. Термин «модулярная функция» возник потому, что значение $\frac{m}{n}$ функции $\frac{P^2(t)}{Q^2(t)}$ в корне t оказывается равным дополнительному модулю k'. Теория модулярных и более общих автоморфных функций была создана в последние два десятилетия XIX в. немецким математиком Ф. Клейном и французским математиком А. Пуанкаре, которые выяснили фундаментальную роль групп дробно-линейных преобразований в теории аналитических функций.

Гаусс первым из математиков к 1811 г. имел отчетливое представление об интегрировании по кривым в комплексной плоскости, об интегральной теореме Коши (до Коши), а многозначность, например, функции $\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{dz}{z}$ объяснял наличием различных путей интегрирования. Он ничего не публиковал об этом, но изложил свое понимание вопроса в письме 1811 г. к Бесселю. «…Что нужно понимать под $\int \varphi(x)dx$ для $x = a + bi$? Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого

интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a+bi$) переходит к $x=a+bi$, и тогда сложить все $\varphi(x)dx$. Так смысл вполне установлен. Но переход может совершиться бесконечно многими способами. Так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a+bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ совершается поэтому по линии и, следовательно, возможен бесконечно многими способами. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int\varphi(x)dx$ при двух различных переходах сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, функция $\varphi(x)$ нигде не равна ∞. Это прекрасная теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае». Так Гаусс впервые формулирует интегральную теорему, которая носит имя Коши, опубликовавшего ее в 1825 году. Кроме того, Гаусс добавляет, что функция $\varphi(x)$ при этом должна быть однозначной и не обращаться в ∞ на линиях интегрирования. Далее Гаусс продолжает: «Вместе с тем, впрочем, отсюда ясно, как функция, порожденная посредством интеграла $\int\varphi(x)dx$, может иметь многие значения для одного и того же значения x, а именно в зависимости от того, будет ли при переходе допущен однократный или многократный обход вокруг точки, в которой $\varphi(x)=\infty$, или же такого обхода совсем не будет. Если, например, $\log x$ (так Гаусс здесь обозначает $\operatorname{Ln} x$ комплексной переменной x) определить посредством $\int\frac{dx}{x}$, начиная от $x=1$, то можно прийти к $\log x$ или не огибая точку $x=0$, или посредством

однократного или многократного обхода вокруг нее; каждый раз будет добавляться константа $+2\pi i$ или $-2\pi i$; отсюда совершенно ясны различные логарифмы каждого числа. Если же $\varphi(x)$ не становится бесконечной ни для одного конечного значения x, то интеграл всегда является только однозначной функцией x».

В многомерном анализе Гаусс первым преобразует интегралы по области в интегралы по границе области в применении к конкретным задачам и получает в частных случаях формулы Остроградского, Стока и Грина. Продолжая исследования Лагранжа, Лежандра и Лапласа по теории потенциала, Гаусс в работе 1813 г. рассматривает вопрос о притяжении точки эллипсоидом с полуосями A, B, C; его поверхность он задает параметрически: $x = A\cos p$, $y = B\sin p\cos q$, $z = C\sin p\sin q$. Здесь он формулирует 6 теорем относительно поверхностных интегралов второго рода от некоторых функций, например (в его обозначениях): объем тела равен $\int ds\ x\cos QX = \int ds\ y\cos QY = \int ds\ z\cos QZ$; компоненты силы притяжения поверхностью точки M равны $\int\frac{ds\cos QX}{r}$, $\int\frac{ds\cos QY}{r}$, $\int\frac{ds\cos QZ}{r}$; интеграл $\int\frac{ds\cos MQ}{r^2}$ равен 0, либо -2π, либо -4π в зависимости от того, лежит ли точка вне тела, на его поверхности или внутри тела. Здесь ds – элемент поверхности, P – точка поверхности с координатами x, y, z; Q и M – фиксированные точки внутри или вне тела; $PM = r$; а QX, QY, QZ – углы между отрезком PQ и осями координат; MQ – угол между PM и PQ. В применении к эллипсоиду Гаусс преобразует интегралы по поверхности эллипсоида в тройные интегралы по его объему и, таким образом, получает частные случаи формулы Остроградского. В работе Гаусса «Общие принципы теории фигуры жидкостей в состоянии равновесия» (1830) рассматривается двумерная изопериметрическая

задача с переменной областью интегрирования. Возникающий при этом интеграл по поверхности $z = z(x, y)$ Гаусс заменяет интегралом по границе поверхности, получая для этого случая формулу, которая носит имя Стокса, а в случае, когда поверхность $z = z(x, y)$ представляет собой часть плоскости, – формулу Грина. Фактически «формула Грина» встречается уже у Эйлера в 1771 г., но Эйлер не вводит понятия криволинейного интеграла, а говорит о сумме определенных интегралов. В работе «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1840) Гаусс строит общую теорию потенциала.

Английский математик **Джордж Грин (1793–1841)** в работе «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828) излагает теорию потенциала («потенциальной функции») электрических и магнитных сил и, в частности, вводит так называемую функцию Грина. Он был сыном бедного ноттингемского пекаря, и его работа не сразу получила известность. Гаусс не был с ней знаком. В 1839 г. Грин был приглашен на кафедру в Кембриджский университет, он является основателем кембриджской школы математической физики. В работе Грина нет «формулы Грина», но есть аналог формулы Остроградского в частных случаях.

В первой четверти XIX в. начинает осуществляться реформа математического анализа, так называемая его арифметизация, связанная, прежде всего, с развитием теории пределов, введением современного понятия непрерывной функции и использованием техники рассуждений «на языке $\varepsilon - \delta$». К этой реформе относится и разработка вопросов сходимости рядов и последовательностей, построение теории действительных чисел. Первые результаты, касающиеся реформы математического анализа, принадлежат Гауссу. Сохранилось несколько начальных страниц рукописи статьи Гаусса «Основные понятия учения о рядах» (так он называет здесь последовательности), относящейся

примерно к 1800 г., но опубликованной лишь в 1917 году. Здесь речь идет о пределе последовательности. Сначала Гаусс вводит понятия верхней и нижней граней последовательности, а затем – верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности, но не в современных терминах. Если эти последние совпадают, то их общее значение Гаусс называет абсолютной границей (т. е. пределом) последовательности. Формулируется теорема о пределе суммы двух последовательностей. Крупным успехом Гаусса было исследование сходимости гипергеометрического ряда, опубликованное в работе 1813 г., о чем говорилось выше.

Кроме занятий чистой математикой, Гаусс многие годы плодотворно занимался астрономией, геодезией, исследованием земного магнетизма. Обладая исключительными вычислительными способностями, он выполнял обширные вычисления в связи с обработкой результатов измерений и создавал новые методы вычислений. Рассматривая в части 2 пособия [234] развитие теории вероятностей в XVIII в., мы уже говорили о разработке Гауссом теории случайных ошибок измерений: введение нормального закона распределения ошибок и создание метода наименьших квадратов. Полученные и опубликованные Гауссом результаты в ряде вопросов теории чисел и алгебры оказали огромное влияние на развитие этих наук в XIX–XX вв. и получили далеко идущие обобщения. К таким вопросам относятся: квадратичный закон взаимности, теория квадратичных форм, теория деления окружности, тригонометрические суммы Гаусса в теории чисел. Последний из этих вопросов, ввиду недостатка места, мы не затрагивали здесь, он получил мощное развитие уже только в XX в. в аналитической теории чисел в работах Г. Вейля, Г. Х. Харди и Дж. Литлвуда, а особенно – И. М. Виноградова.

О Гауссе: [110; 111; 140, гл. 1; 107, гл. 2; 71, с. 141–190; 1, т. 3, гл. 2 и 3; 69; 9, с. 346–380; 2, с. 154–162; 74, гл. 14].



Карл Фридрих Гаусс



Шарль Дюпен



Фердинанд Готлибович Миндинг



Карл Михайлович Петерсон



Жозеф Лиувилль



Джордж Грин

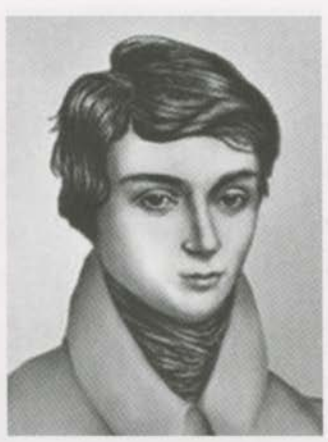

Бернард Больцано

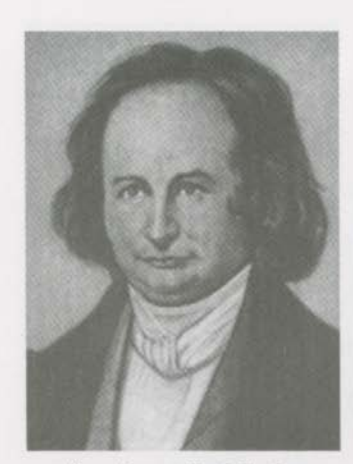

Огюстен Луи Коши


Жан Батист Жозеф Фурье

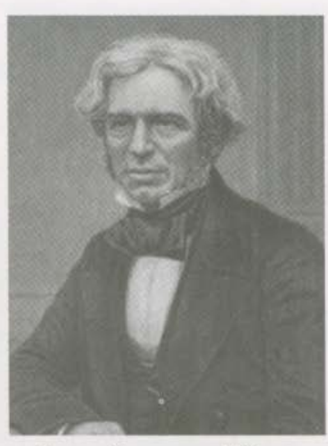

Симеон Дени Пуассон


Нильс Хенрик Абель


Эварист Галуа


Карл Густав Якоб Якоби


Жан Виктор Понселе


Август Фердинанд Мёбиус


Юлиус Плюккер


Якоб Штейнер


Христиан фон Штаудт


Мишель Шаль


Фердинанд Карл Швейкарт


Николай Иванович Лобачевский


Янош Бояи


Тимофей Федорович Осиповский


Михаил Васильевич Остроградский



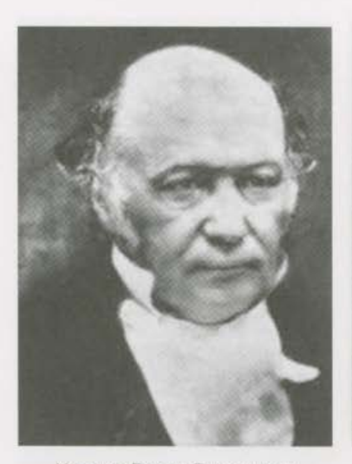
Габриэль Ламе



Виктор Яковлевич Буняковский



Петер Густав Лежён-Дирихле



Уильям Роуен Гамильтон



Эудженио Бельтрами



Феликс Клейн

Больцано

Реформа математического анализа связана прежде всего с именами Больцано (1781–1848), Коши (1789–1857), Гаусса (1777–1855) и Абеля (1802–1829) в первой трети XIX в., а свое завершение классический математический анализ получает в последней трети XIX в. в лекциях Вейерштрасса (1815–1897) и теории множеств Кантора (1845–1918).

Гениальный чешский математик и философ **Бернард Больцано (1781–1848)** родился в Праге. Его отец – итальянец, переехавший в молодом возрасте в Чехию, – был образованным торговцем предметами искусства, мать – дочь пражского торговца немецкого происхождения. В 1796–1805 гг. Больцано учится в знаменитом Карловом университете в Праге: оканчивает сначала философский, а затем теологический факультеты. Имея степень доктора философии и сан священника, он с 1805 г. в течение 15 лет занимает кафедру истории религии в этом университете. В этот период он опубликовал 4 математические работы, в том числе очень важную работу «Чисто аналитическое доказательство…» (1817), посвященную выводу теоремы об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль. В 1815 г. он был избран членом Королевского чешского научного общества и деканом философского факультета. В 1817 г. на основе доносов правительству и папе римскому против Больцано возбуждают дело, в котором его обвиняют в свободомыслии, а именно в том, что в своих воскресных проповедях он сводит религию к этике и распространяет свои социально-утопические взгляды об идеальном государственном устройстве. В 1819 г. он был отстранен от занимаемой должности и отдан под надзор полиции. Благодаря ходатайству видных ученых дело в отношении Больцано было прекращено в 1824 г., но ему было запрещено служить в государственных учреждениях, выступать публично и печатать свои

сочинения. С тех пор Больцано проживает в основном у своих друзей, в деревенской глуши. На протяжении 1820-х гг. он написал огромный четырехтомный труд «Наукоучение», посвященный разработке основ формальной логики и методологических принципов теории науки. Его друзьям удалось издать этот труд в 1837 году. Около 1830–1834 гг. Больцано пишет свой труд «Учение о функциях», представляющий его главный вклад в разработку и обоснование математического анализа с современных нам позиций. Он был напечатан лишь в 1930 г. Уже после смерти Больцано выходит его книга «Парадоксы бесконечного» (1851), в которой он выступает как предшественник Г. Кантора в создании теории множеств. После смерти Больцано осталось огромное рукописное наследие, в основном философского содержания. При жизни Больцано не получил должного признания как математик, а был известен больше как философ, теолог и социальный критик. Только в 1881 г. общий обзор и высокую оценку математических работ Больцано, опубликованных в XIX в., дал О. Штольц, ученик Вейерштрасса. Но приоритет Больцано в глубоком исследовании свойств непрерывных функций полностью выяснился лишь в 1930 г., после опубликования его «Учения о функциях», и тогда он был признан как один из гениальных математиков. Успехи Больцано вызывают восхищение тем более, что он достиг их, несмотря на лишения и туберкулез легких, которым болел с 1813 года.

Рассмотрим кратко основные достижения Больцано в анализе. Термин «непрерывная функция» появляется в XVIII в., но тогда он имел иной смысл, чем сейчас. Л. Эйлер, а за ним и другие математики XVIII в. называют «непрерывными» функции, заданные во всей области определения одним аналитическим выражением (формулой). Функции, заданные более чем одним таким выражением, Эйлер называет «смешанными», или «прерывными», или «неправильными». Исключительное значение для дальнейшего развития математического

анализа и выделения из него теории функций действительной переменной имело введение современного понятия непрерывной функции. В работе «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» (1817) Больцано первым дает современное определение непрерывной функции, даже более совершенное по форме, чем приведенное Коши спустя четыре года в «Алгебраическом анализе» (1821). «Если бы Больцано, – пишет американский математик и историк математики Дж. Кулидж, – не дал ничего больше в математике, чем определение непрерывной функции, – уже это одно обеспечило бы ему место в истории этой дисциплины».

Работа Больцано посвящена доказательству теоремы: всякая непрерывная на отрезке функция, принимающая на его концах значения противоположного знака, в некоторой точке этого отрезка обращается в нуль. Больцано называет имена ряда математиков, приводивших доказательства этой теоремы или использовавших ее в доказательстве «основной теоремы алгебры». Эти доказательства опирались либо на то, что соответствующая геометрическая линия пересекает ось абсцисс, либо строились на использовании времени и движения. Больцано не против того, чтобы геометрические и механические понятия привлекались для объяснения, но построенные на их основе доказательства считает «нетерпимым нарушением хорошего метода» вывода истин чистой математики, к которой он относит арифметику, алгебру и анализ. Больцано утверждает, что нельзя давать и определение непрерывной функции как такой, которая принимает в качестве значений все числа между любыми двумя ее значениями; это свойство – лишь следствие теоремы, чисто аналитическому доказательству которой посвящена его работа.

Больцано в этой работе дает свое определение непрерывной функции: «...согласно правильному объяснению под выражением, что

функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, понимают лишь то, что если x – какое-нибудь из этих значений, то разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим; или пусть будет … $f(x+\omega)=f(x)+\Omega$» [3, с.174]. Здесь неявно подразумевается модуль, для которого в то время не было обозначения и которое ввел Вейерштрасс в 1841 году. Это определение выражает непрерывность функции на промежутке. Позже в «Учении о функциях» Больцано дает определение непрерывности функции в точке, слева и справа от точки, и широко пользуется «эпсилонтикой» (с другими буквами вместо ε и δ). Он не дает общего определения функции, а только определение непрерывной функции. Определение предела, отдельное от понятия непрерывности, Больцано не приводит и не употребляет здесь этот термин, как и термин «бесконечно малая». Но он оперирует со сходящимися последовательностями функций и чисел, вообще с переменными «величинами, которые могут стать меньшими чем любая данная», и для их обозначения применяет буквы ω и Ω, как и в более ранней брошюре «Биномиальная теорема» (1816), посвященной биномиальному ряду.

Доказательство теоремы об обращении непрерывной функции в нуль опирается у Больцано на теорему существования точной верхней грани ограниченного сверху числового множества, которую он впервые сформулировал, хотя и в непривычном для нас виде. Для доказательства этой последней теоремы Больцано впервые вводит критерий сходимости функциональной последовательности, который носит имя Коши потому, что через 4 года Коши в «Алгебраическом анализе», получившем широкую известность, формулирует аналогичный критерий сходимости ряда. Необходимость критерия Коши почти очевидна, чего, однако, нельзя сказать о достаточности. Более

справедливо было бы присвоить критерию сходимости имя Больцано, или Больцано–Коши, т. к. Больцано сформулировал его раньше и, в отличие от Коши, привел, хотя и неполное, доказательство достаточности. Позже в «Учении о функциях» (§ 19–23) Больцано впервые приводит теорему Больцано–Вейерштрасса существования предельной точки множества значений ограниченной числовой последовательности, из которой теперь обычно выводят достаточность критерия Коши. Для полноты доказательства Больцано недоставало строгой теории действительных чисел. Строгое доказательство теорем существования точных граней и предельной точки ограниченного числового множества дал Вейерштрасс, построивший и теорию действительных чисел (около 1863, опубликована в 1872 году). По-иному разработали теорию действительный чисел Дедекинд (1858) и Кантор (1872). В одной из рукописей, написанной около 1830–1835 гг., а опубликованной только в 1962 г., Больцано дает набросок теории действительных чисел как фундаментальных последовательностей рациональных чисел, предшествуя Кантору в аналогичном способе построения этой теории.

При жизни Больцано успел опубликовать 5 математических работ, прежде чем ему было запрещено печататься. В 1882 г. в Вене вышло 12-томное собрание трудов Больцано, но главная его математическая работа «Учение о функциях» тогда не была известна и не вошла в это собрание. Впервые она упоминается в 1902 г. в «Сообщениях» философского общества Венского университета в числе работ Больцано, подлежащих опубликованию, как «содержащая массу удивительно современных воззрений». В 1920 г. чешский преподаватель гимназии М. Яшек обнаружил в Венской библиотеке рукопись «Учения о функциях» и сообщил о ее содержании в трех своих работах 1921–1924 гг., а в 1930 г. эта работа Больцано была опубликована в Праге, почти через 100 лет после ее написания.

Сочетая занятия математикой и философией, Больцано больше всего интересовался вопросами обоснования анализа и геометрии. Вопрос о том, что представляет собой континуум и, в частности, линия, издавна занимал умы философов. Приступая к построению анализа на чисто арифметической основе, Больцано заменяет интуитивное представление о кривой точным понятием непрерывной функции, выраженным на языке неравенств. В работе «Учение о функциях» он не ограничивается этим, а с глубокой проницательностью впервые исследует свойства непрерывных функций одной действительной переменной. В этом отношении он превосходит Коши, который почти в то же время пришел к современному понятию непрерывной функции, но не провел глубокого исследования этого понятия. Однако Коши обладал большой разносторонностью, получая замечательные результаты во многих областях математики.

Работа Больцано «Учение о функциях» (183 с.) состоит из введения и двух частей: I. Непрерывные и разрывные функции; II. Производные. Перечислим основные результаты Больцано, они содержатся в части I:

1) определение непрерывности функции в точке, а также односторонней непрерывности;
2) теорема существования точных граней ограниченного множества действительных чисел;
3) теорема существования предельной точки множества значений ограниченной числовой последовательности;
4) теорема об ограниченности непрерывной на отрезке функции;
5) теорема о достижении непрерывной на отрезке функции своих точных граней;
6) теорема о промежуточных значениях непрерывной функции;
7) теория монотонных функций, в частности достаточное условие непрерывности монотонной функции;
8) построение примера непрерывной на отрезке функции, не имеющей производной ни в одной точке отрезка (Больцано доказал

только, что она не имеет производной на всюду плотном множестве точек отрезка). Сейчас она называется функцией Больцано.

Теоремы 2 и 6 содержались уже в работе «Чисто аналитическое доказательство…» (1817), а 6 – также в «Алгебраическом анализе» Коши (1821). Примерно через 30 лет немецкий математик К. Вейерштрасс (1815–1897) переоткрыл теоремы 2–5 и построил иной пример непрерывной функции, не дифференцируемой ни в одной точке отрезка, не зная о примере Больцано. Сообщение о функции Вейерштрасса было опубликовано в 1875 г. и явилось первым известным в математическом мире примером такого рода. Подробное изложение содержания «Учения о функциях» Больцано приведено в большой статье известного чехословацкого математика В. Ярника в сборнике [240].

Приведем ряд подробностей, характеризующих работу Больцано «Учение о функциях».

Определение Больцано непрерывности функции в точке и односторонней непрерывности в § 2 довольно многословное, но надо иметь в виду, что математический язык и обозначения в то время не обладали той лаконичностью и четкостью, которая достигнута к настоящему времени. Но смысл этих определений Больцано такой же, как и у принятых сейчас «на языке неравенств». После критики более ранних употреблений термина «непрерывность» Больцано доказывает непрерывность некоторых простейших функций. В § 10 Больцано строит пример функции, определенной на отрезке и непрерывной только в одной точке. В § 19–30 он доказывает указанные выше теоремы 4–6 о непрерывных функциях, отмечая, что теоремы 4, 5 перестают быть верными, если вместо отрезка $[a,b]$ взять незамкнутый промежуток. Доказательства теорем 4–6 базируются в основном на теоремах 2, 3. Глубокую проницательность Больцано проявляет при рассмотрении теоремы 6 о промежуточных значениях непрерывной функции: всякая

функция $f(x)$, непрерывная на (a,b), обладает свойством A: если $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, то $f(x)$ принимает на (x_1, x_2) все значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Больцано ставит вопрос: верно ли, что только непрерывные функции обладают свойством A? Он дает отрицательный ответ и, более того, высказывает верное утверждение: существуют функции, обладающие свойством A, но разрывные в каждой точке. Больцано также пытается построить соответствующий пример. Проницательность Больцано в данном вопросе находится в резком контрасте с тем, что некоторые математики даже в конце XIX в. определяли непрерывность функции посредством свойства A. Так делает один из ведущих французских математиков второй половины XIX в. Ш. Эрмит (1822–1901) в своем «Курсе анализа» (1891), представляющем на самом деле курс аналитических функций (см. с. 6 русского издания 1936 г.). Знаменитый французский математик А. Лебег (1875–1941) жалуется в 1904 г. на то, что в некоторых французских школах вводят непрерывность посредством свойства A. Отметим, что пример всюду на отрезке разрывной функции, принимающей все промежуточные между наименьшим и наибольшим значения, имеется в пособии Г. И. Дринфельда «Дополнения к общему курсу математического анализа» (Харьков: ХГУ, 1958. – С. 5–10).

В § 49–59 Больцано четко развивает теорию монотонных функций. За неимением места укажем лишь, что в § 59 Больцано впервые приводит достаточное условие непрерывности монотонной функции: если $f(x)$ возрастает (или убывает) на (a,b) и обладает свойством A на этом интервале, то $f(x)$ непрерывна на (a,b). Приведем оригинальное доказательство Больцано этой теоремы. Пусть $f(x)$, для определенности, возрастает. Докажем непрерывность $f(x)$ справа в точке x_0 $(a < x_0 < b)$. Выберем h_0 такое, что $x_0 < x_0 + h_0 < b$, тогда $f(x_0 + h_0) - f(x_0) = D > 0$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем μ $(0 < \mu < 1)$

такое, что $\mu D < \varepsilon$. Тогда $f(x_0) < f(x_0) + \mu D < f(x_0 + h_0)$, следовательно, в силу свойства A, существует h_1 $(0 < h_1 < h_0)$ такое, что $f(x_0 + h_1) = f(x_0) + \mu D$. Таким образом, $0 < f(x_0 + h_1) - f(x_0) < \varepsilon$ и, поскольку $f(x)$ возрастает, то $0 < f(x_0 + h) - f(x_0) < \varepsilon$ при $0 < h < h_1$. Аналогично доказывается непрерывность $f(x)$ слева в точке x_0.

Один из наиболее впечатляющих результатов Больцано содержится в § 75, где он строит пример функции на отрезке $[a,b]$, которая носит его имя. Она не монотонна ни на каком подынтервале отрезка $[a,b]$, непрерывна на $[a,b]$ и, как показывает Больцано в § 19 второй части работы, не дифференцируема на всюду плотном множестве точек отрезка $[a,b]$ (по словам Больцано, не имеет производной «для стольких значений своего переменного, что между любыми из них можно обнаружить еще третье, для которого она опять-таки не имеет производной»). Чешский математик К. Рыхлик, с комментариями которого была издана в 1930 г. работа Больцано «Учение о функциях», доказал, что функция Больцано не дифференцируема ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

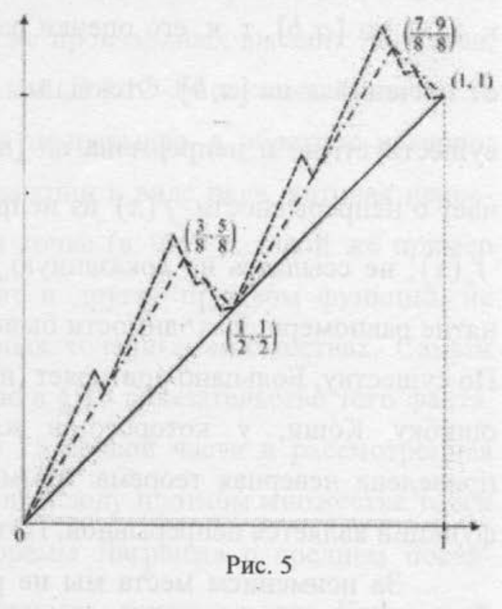


Рис. 5

Больцано строит свою функцию в виде предельной функции $f(x)$ последовательности непрерывных функций $f_n(x)$, каждая из которых представляет собой ломаную с конечным числом звеньев, причем длины звеньев стремятся к нулю при $n \to \infty$, а каждая из ломаных, имея свои вершины, проходит и через все вершины предыдущих ломаных (рис. 5, взятый из статьи В. Ярника в указанном выше сборнике, где вместо отрезка $[a,b]$ рассматривается отрезок $[0,1]$).

В предположении существования предельной функции $f(x)$ Больцано доказывает, что она не является монотонной ни на каком подынтервале отрезка $[a,b]$. Для доказательства существования $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ он использует свой критерий сходимости функциональной последовательности, называемый в настоящее время критерием Коши сходимости. Колебания функции $f_n(x)$ на промежутках монотонности Больцано оценивает геометрической прогрессией вида $M\theta^n$ $(0<\theta<1)$. Далее разности $f_{n+r}(x)-f_n(x)$ при $r=1,2,\ldots$, оцениваются не зависящей от x и r суммой конечного числа членов геометрической прогрессии, причем эта сумма стремится к нулю при $n\to\infty$. Отсюда Больцано заключает, что последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на $[a,b]$. Он доказал здесь на самом деле равномерную сходимость последовательности непрерывных функций $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a,b]$, т. к. его оценки разностей $f_{n+r}(x)-f_n(x)$ не зависят от значений x на $[a,b]$. Отсюда мы делаем вывод, что $f(x)$ не только существует, но и непрерывна на $[a,b]$. Но Больцано неверно заключает о непрерывности $f(x)$ из непрерывности и сходимости функций $f_n(x)$, не ссылаясь на доказанную им равномерную сходимость. Понятие равномерной сходимости было введено позже, в середине XIX в. По существу, Больцано повторяет (но для случая последовательностей) ошибку Коши, у которого в «Алгебраическом анализе» (1821) приведена неверная теорема: сумма сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной. Позже Коши исправил свою ошибку.

За неимением места мы не рассматриваем вопрос о недифференцируемости функции Больцано, об этом можно прочесть в статье В. Ярника в указанном выше сборнике или в статье В. Ф. Бржечки «О функции Больцано» (Успехи математических наук, 1949. – Т. 4,

вып. 2. – С. 15–21). Соответствующий текст Больцано приведен в приложении 2 к книге Э. Кольмана [112].

Отметим, что у Больцано, наряду с большим количеством строго доказанных теорем, имеется и много нестрого доказанных утверждений, а также и просто неверных. Это объясняется новизной и трудностью понятия непрерывной функции. Так он (заодно с Коши) неверно понимает непрерывность функции двух переменных как непрерывность по каждой переменной в отдельности, а также допускает ряд ошибочных утверждений о разрывных функциях. В некоторых случаях он близко подошел к понятию равномерной непрерывности или его отсутствию, но не смог выделить и сформулировать это понятие.

Вторая часть «Учения о функциях» Больцано посвящена дифференциальному исчислению. Здесь также наряду с удачным изложением он допускает и немало ошибок, но отдельные вопросы исследует глубже, чем его предшественники. Он дает и определения левой и правой производных в точке, а также производных высших порядков, частных производных и первообразной. В § 12–14 показывает, что если функция дифференцируема, то она непрерывна, а обратное неверно; приводит оригинальный пример функции в виде ряда, которая непрерывна, но не имеет производной в точке (в 1869 г. такой же пример опубликовал Кантор). Он приводит и другие примеры функций, не имеющих производной на различных точечных множествах. Самым впечатляющим является изложенное в § 19 доказательство того факта, что его функция, построенная в § 75 первой части и рассмотренная нами выше, не имеет производной на всюду плотном множестве точек отрезка $[a,b]$. Доказательству теоремы Лагранжа о среднем посвящены § 27–32. Обнаружив ошибочность доказательства Коши этой теоремы и пытаясь его исправить, Больцано и сам действует нестрого. В § 72–99 Больцано рассматривает вопрос об экстремумах функции, формулу и ряд Тейлора, в том числе и для функций нескольких

переменных. Но он допускает ошибку, утверждая (без предположения о разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора), что если $f^{(k)}(a)=0$ $(k=n+1,n+2,\ldots)$, то

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Этой ошибки не избежали также Эйлер и Лагранж, но ее избежал Коши, построив пример, о котором речь будет ниже в очерке о Коши. Но, несмотря на некоторые недостатки, неизбежные в то время, труд Больцано «Учение о функциях» – замечательное произведение.

Уже в своих ранних математических работах Больцано излагает свои концепции обоснования геометрии. Он считает, что точка, линия и поверхность есть лишь «воображаемые предметы». Для пар точек он, по существу, строит геометрически векторное пространство на плоскости, указывая и на его трехмерный аналог. Больцано отказывается от механического представления Ньютона о том, что кривая порождается движением точки, а рассматривает кривую как одномерный континуум, состоящий из точек. Поверхность и тело, согласно Больцано, – также точечный континуум соответствующей размерности. Под континуумом он понимает плотное в себе множество, т. е. состоящее, по выражению Больцано, из таких точек, «что каждая имеет на сколь угодно малом расстоянии по меньшей мере одну соседнюю точку». Здесь Больцано предшествует Кантору, который в определении континуума добавил еще условие связности. В одной работе, написанной в 1843–1844 гг., Больцано дает определение «протяжений» одного, двух и трех измерений, предвосхищая современное понятие топологической размерности.

В работе «Парадоксы бесконечного» (1851) Больцано выступает как главный предшественник становления теории множеств, разработанной Г. Кантором в конце XIX в. Математики и философы, начиная с

античных времен, размышляли над проблемой бесконечного в различных его формах. Выдающийся немецкий математик Д. Гильберт (1862–1943) в своей статье «О бесконечном» (см. добавление VIII к русскому переводу 1948 г. его книги «Основания геометрии») сказал: «С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность» (с. 341). О ведущей роли бесконечного в анализе Гильберт говорит: «... математический анализ можно в известном смысле назвать единой симфонией бесконечного» (с. 345). «Однако сам анализ еще не ведет нас к глубочайшему проникновению в сущность бесконечного. Такому проникновению гораздо больше способствует дисциплина, которая стоит ближе к общефилософским приемам мышления и которая была призвана опять, уже в новом свете, поставить весь комплекс вопросов, касающихся бесконечного. Этой дисциплиной является теория множеств, создателем которой был Георг Кантор» (с. 345–346).

Больцано как математик и философ, поставивший себе целью пересмотр основ математических наук и логики, не мог пройти мимо проблемы бесконечного, особенно в математическом анализе. В «Парадоксах бесконечного» Больцано критикует предложенные до него математиками и философами различные определения и подходы к бесконечному как приводящие к парадоксам (например: определение бесконечного как того, что не способно к дальнейшему увеличению; определение бесконечности как величины, которая больше всякой данной величины и др.). В § 9 он дает свое определение «бесконечного количества» как такого, что «каждое конечное многообразие представляет только часть его» (слово «количество» здесь может означать как множество, так и величину). В § 13–19 приводится ряд примеров

бесконечных количеств. Английский математик XIV в. Т. Брадвардин в своем «Трактате о континууме» геометрически устанавливал взаимно-однозначное соответствие между точками средней линии треугольника и точками его основания, приводя это в качестве одного из парадоксов (ведь основание треугольника в два раза длиннее его средней линии). Галилей в своих «Беседах и математических доказательствах…» (1638) указывает на взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и его правильной частью – множеством квадратов натуральных чисел. При этом он добавляет, что «свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где речь идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам». Во время Больцано математики не задумывались над такими фактами. Заслугой Больцано является установление взаимно-однозначного соответствия между бесконечным множеством и его правильной частью на примере взаимно-однозначного соответствия между отрезками числовой оси, рассматриваемыми как точечные множества (он называет их «многообразиями»). В качестве иллюстрации Больцано задает такое соответствие между отрезками $[0;5]$ и $[0;12]$ уравнением $5y = 12x$, где $x \in [0;5]$, $y \in [0;12]$. Он указывает, что если имеется взаимно-однозначное соответствие между конечными множествами, то они равны. После введения Кантором понятия мощности множества Дедекинд в работе «Что такое числа и для чего они служат» (1888) дал определение бесконечного множества как такого, которое равномощно некоторой своей правильной части, чего не сделал Больцано, хотя вплотную подошел к этому. Кроме того, Больцано не оценил значения взаимно-однозначного соответствия между множествами как признака «численности» их элементов и остановился перед введением понятия мощности множества. Но все же он ставит задачу об «исчислении бесконечностей» и делает первые, хотя и неудачные, шаги в этом направлении (§ 29–30). Далее Больцано рас-

сматривает парадоксы в математическом анализе и физике, связанные с понятием бесконечности, и предлагает способы их устранения. Он оперирует с применяемыми в то время в анализе потенциально бесконечно малыми (большими), а также с вызывавшими недоверие актуально бесконечно малыми (большими) и актуально бесконечными множествами, т. е. множествами, взятыми в целом, в завершенном виде. Кантор отзывался о Больцано как о «в высшей степени остроумном философе и математике» и высоко оценивал его книгу «Парадоксы бесконечного», отмечая в ней в то же время ряд недостатков и ошибочных положений. В русском переводе она издана в 1911 г. в Одессе издательством «Матезис». Истории развития проблемы бесконечности в философии и математике посвящена книга И. Н. Буровой [148].

Принципам разработки оснований формальной логики и «изложению наук», т. е. методологическим принципам теории науки, Больцано посвятил огромный четырехтомный труд «Наукоучение» объемом около 2400 стр., написанный в 1820–1829 гг. и опубликованный в 1837 году. Мы лишь очень бегло коснемся этого труда, а подробно с его содержанием можно ознакомиться по книге Б. И. Федорова «Логика Бернарда Больцано» (Л., 1980. – 160 с.), его же статье в сборнике [213], а также по книге Э. Кольмана [112]. Больцано отмечает, что в вопросах разработки логики на него оказали влияние: Г. В. Лейбниц, мечтавший о создании универсального исчисления («всеобщей характеристики»), которое сводило бы всевозможные рассуждения к их замене с помощью символов; книга А. Арно и П. Николя «Логика, или Искусство правильно мыслить» (1662); книга И. Г. Ламберта «Новый Органон» (1764). Развитие логики в конце XVIII в. существенно сдерживалось авторитетом Канта, а в начале XIX в. – Гегеля, считавших, что формальная логика не нуждается в усовершенствовании и не оценивших математического направления в логике.

Часть I «Наукоучения» представляет «учение об основаниях», здесь Больцано вводит понятие об «истинах в себе» и др. Выражение «в себе» Больцано взял у Канта, у которого оно указывает на объективность существования и непознаваемость «вещей в себе». Под «истиной в себе», или объективной истиной, Больцано понимает «любое предложение, которое высказывает нечто таким, каково оно есть», т. е. «все, что верно, знает ли об этом кто-либо, или нет». Признавая как реальность объективного мира, так и «истин в себе», Больцано стоит на позициях объективного идеализма. В этом отношении он близок к древнегреческому философу Платону (427–347 гг. до н. э.). Философские позиции платонизма или сходные с ними разделяли многие математики XIX в., для которых мир абстрактных математических объектов является не менее, а в каком-то смысле даже более реальным, чем вещи действительного изменчивого мира. На сходных позициях стоял и Г. Кантор. Больцано абсолютизирует мир вечных «истин в себе», приуменьшая роль субъективного фактора в познании, которому в настоящее время придают большое значение, особенно в физике (например в квантовой механике).

Часть II «Наукоучения» – наиболее обширная и содержит наиболее ценные достижения Больцано в логике. Здесь он излагает свое учение о «понятиях в себе», образовании из них «предложений в себе» – истинных и ложных, а также теорию дедукции (правила вывода). Совершенно новым в логике Больцано является разработка метода вариации представлений, который заключается в изменении отдельных понятий, входящих в предложения. Больцано обозначает предложения буквами A, B, C,…, а варьируемые части предложений – буквами i, j, k,… Рассматривая предложения с переменными составными частями, Больцано кладет начало математической логике, являясь предшественником ее основоположников: английского математика Дж. Буля (1815–1864), шотландского математика О. де Моргана

(1806–1871) и немецкого математика Г. Фреге (1848–1925). Математическая логика является частью формальной логики. Одним из разделов формальной логики является семантика, которая изучает вопросы, связанные с выяснением значения (смысла) понятий и высказываний, их истинностью или ложностью. Уделяя много внимания этим вопросам, Больцано является одним из главных предшественников семантики. Он впервые описал фундаментальное для логики понятие логического следования. Лет через 40 после Больцано и независимо от него Г. Фреге во многом повторяет то, что сделал Больцано по выяснению вопроса о смысле и истинности высказываний, поэтому Фреге считают одним из главных основателей семантики. Б. И. Федоров в своей книге основное внимание обращает на содержание части II «Наукоучения» Больцано и формализует на языке математической логики пять систем вывода (дедукции) Больцано.

В части III, которая называется «Теория познания», Больцано рассматривает свойства субъективных представлений и суждений, их отношение к истине. Он делает первые шаги к созданию вероятностной логики, рассматривая суждения, истинные лишь с некоторой вероятностью. Часть IV называется «Искусство открытия», или «Эвристика».

Последняя, часть V «Наукоучения» Больцано посвящена принципам изложения наук, она описана в статье Б. И. Федорова в сборнике [213]. Укажем лишь на некоторые особенности подхода Больцано к этому вопросу. Согласно Больцано, «способствование всеобщему благу является высшим нравственным законом». В этом принципе он видит основное назначение науки и подчиняет ему методы ее изложения. Больцано считает, что любая подлинно научная теория должна быть основана на системе аксиом («общих понятий»), которые не требуют доказательства. По мнению Больцано, «все предметы чистой математики – это чисто понятийные истины, в составные части

которых не входит ни одно созерцание». Таким образом, в математике Больцано выступает предшественником аксиоматического метода, развитого в XX в. Д. Гильбертом. Больцано требовал, чтобы система аксиом была полной и не противоречивой. Требование независимости системы аксиом было добавлено уже после Больцано. Отметим своеобразную неприязнь Больцано к использованию непрямых (косвенных, от противного) доказательств. В недавно обнаруженной его рукописи «Анти-Евклид» он пытается перевести все доказательства Евклида от противного в прямые. В этом он на несколько десятилетий предвосхищает направление интуиционизма и конструктивной математики, не признающих доказательств от противного. В части V «Наукоучения» Больцано приводит и другие правила «истинно хорошего метода» изложения наук.

Из приведенного очерка видно, что несмотря на трудные жизненные обстоятельства, Больцано смог получить результаты первостепенной важности в математике и логике.

О Больцано: [112; 240; 15, с. 62–63; 3, с. 171–178; 130, с. 62–64; 144, с. 74–77; 213, с. 36–46].

Коши

Крупнейший французский математик **Огюстен Луи Коши (1789–1857)** родился в Париже в семье высокообразованного юриста, окончившего Сорбонну. В кризисное время революции эта семья удалилась в деревню Аркей под Парижем и выращивала там овощи для пропитания. Огюстен получил прекрасное начальное гуманитарное образование у своего отца. Поблизости от деревни Аркей находилось поместье Лапласа, он обратил внимание на редкие математические способности Огюстена. С приходом к власти Наполеона семейство Коши жило уже в Париже. Отец Огюстена занял пост секретаря сената, а Лаплас – канцлера сената. Лагранж в 1801 г. после знакомства с

молодым Коши сказал, что Коши через некоторое время затмит всех математиков.

Окончив Центральную школу Пантеона, Коши два года занимается математикой и в 1805 г. поступает в Политехническую школу, где слушает лекции Монжа и получает прекрасную математическую подготовку. Затем Коши оканчивает Школу мостов и дорог и в 1810–1813 гг. работает инженером в Шербуре. В это время выходит его мемуар по теории многогранников (1811), за которым последовали мемуар по теории директрис и три мемуара по алгебре. В 1814 г. Коши представил в академию свой мемуар по теории определенных интегралов. После падения Наполеона и реставрации Бурбонов началась чистка учреждений. В 1816 г. из Института Франции (Академии наук) были исключены Карно и Монж, а Коши был назначен академиком. Эти действия королевской власти вызвали взрыв возмущения общественности. Коши обвиняли в том, что он согласился занять место исключенного Монжа, своего учителя. В 1816 г. мемуар Коши по теории волн на поверхности тяжелой жидкости получил премию Парижской академии наук. С этого года Коши преподает в Политехнической школе и Сорбонне, а позже – в Коллеж де Франс. Он был прекрасным лектором.

Во время преподавания в Политехнической школе Коши издал свои пользовавшиеся большой популярностью «Алгебраический анализ» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (1826–1828), «Лекции по дифференциальному исчислению» (1829). Первые два из этих его лекционных курсов были изданы и в переводе на русский язык: «Алгебраический анализ» издан в Лейпциге в 1864 г. (перев. Ф. Эвальди, В. Григорьев, А. Ильин), а «Резюме лекций...» под названием «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении» – в Санкт-Петербурге в 1831 г. (перев. В. Я. Бу-

няковский). В своих лекциях Коши выступает как один из главных реформаторов математического анализа в первой половине XIX в. (систематическое использование понятия предела, введение непрерывности, разработка теории рядов с учетом их сходимости, разработка теории интеграла и др.). В мемуарах 1825–1826 гг., а также в многочисленных заметках под общим названием «Математические упражнения» Коши уже к 1830 г. делает решающий шаг к созданию теории функций комплексной переменной (интегральная теорема Коши, введение вычетов аналитических функций и приложения теории вычетов, интеграл Коши и др.).

По своим идейно-политическим взглядам Коши был сторонником «законной» династии Бурбонов и клерикалом. Он написал две работы в поддержку иезуитов, а философию просветителей XVIII в. считал источником многих бедствий и упадка нравов. Поэтому революция 1830 г. была для него тяжелым испытанием. Он отказался принести присягу новому режиму Луи-Филиппа и был уволен с работы, хотя за ним сохранилось членство в академии. Коши на 8 лет уезжает из Франции: в Швейцарию, затем в Турин в Италии и наконец в Прагу, где становится воспитателем бывшего наследника французского престола, 13-летнего принца.

В 1838 г. Коши возвращается во Францию и с большой энергией отдается научной работе. После революции 1848 г. присяга правительству была отменена, и Коши приступает к преподавательской работе в Сорбонне. После переворота Луи-Наполеона в 1852 г. присяга была восстановлена, но Коши был освобожден от нее специальным указом и продолжал преподавать, сочетая педагогическую деятельность с интенсивнейшей научной работой. По научной производительности его можно сравнить с Эйлером. За последние 19 лет жизни Коши опубликовал около 500 работ по математике, а всего им опубликовано около 800 работ, в том числе 8 книг. Не успевая справиться

с потоком работ Коши, Парижская академия ограничила объем публикуемых статей в ее *Comptes rendus* четырьмя страницами. Но, наряду с публикацией статей в этом журнале академии, Коши в 1840–1850 гг. издает четыре тома новых «Математических упражнений». Однако по мере роста числа работ Коши многие из них были написаны наспех. Труды Коши посвящены теории функций комплексной переменной, основоположником которой он является вместе с Вейерштрассом и Риманом, математическому анализу в действительной области, дифференциальным уравнениям – обыкновенным и с частными производными, теории чисел, алгебре и геометрии, теории упругости и оптике.

Коши упрекают в невнимании к молодым дарованиям, т. к. он не дал отзывов о представленных в Парижскую академию работах молодых математиков Абеля и Галуа. Но следует заметить, что объемная работа Абеля (около 70 стр.) была посвящена новой тематике (так называемые абелевы интегралы), которой Коши не занимался, а работа Галуа была написана очень сжато и содержала глубокие идеи, которые были поняты лишь лет 30 спустя. Есть и другой пример, поиному характеризующий Коши. М. В. Остроградский во время учебы в Париже, не получив своевременно денег из дому, задолжал в гостинице и был посажен в долговую тюрьму. Там он написал работу «О распространении волн в цилиндрическом бассейне». Коши представил ее с лестным отзывом к опубликованию и выкупил Остроградского из долговой тюрьмы, хотя сам был небогатым человеком. Он же рекомендовал тогда Остроградского на должность преподавателя в лицее.

Кратко охарактеризуем достижения Коши в математике, обращая основное внимание на вклад в развитие математического анализа в действительной области и теории функций комплексной переменной. Большой заслугой Коши в деле реформы математического анализа является систематическое построение курса анализа на основе понятий предела и непрерывности, производной как предела, исследования

сходимости рядов. Началом такого построения является его «Курс анализа Политехнической королевской школы. Ч. 1. Алгебраический анализ» (1821), который кратко называют «Алгебраический анализ». По существу этот курс является введением в анализ, без рассмотрения дифференцирования и интегрирования, как и «Введение в анализ бесконечных» (1748) Эйлера. В начале курса Коши приводит определение предела переменной: «Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению таким образом, чтобы в конце концов отличаться от него сколь угодно мало, то последнее называют *пределом* всех остальных» [130, с. 67]; см. также [3, с. 179]. Коши приводит примеры: иррациональное число – предел различных все более близких к нему рациональных дробей; площадь круга – предел площадей вписанных многоугольников при постоянном возрастании числа их сторон. В этом определении понятие переменной объединяет в себе последовательность и функцию. Коши приводит и сокращенное обозначение предела в виде lim., но пользуется им не очень часто. Далее дается определение бесконечно малой как переменной, «численные значения» которой «неограниченно убывают, так что становятся меньше любого данного числа». «Переменная этого рода имеет пределом нуль». «Численным значением» Коши называет абсолютную величину. Затем он приводит определения «бесконечных величин» – положительной и отрицательной. Как видим, определение предела и бесконечно малой у Коши практически не отличается от соответствующих определений у Карно, но заслуга Коши в том, что он установил центральное положение понятия предела в анализе. Коши не приводит общих теорем о пределах, но, рассматривая многочлены вида $a\alpha^{n} + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots$, в ряде теорем устанавливает свойства бесконечно малых и бесконечно больших различных порядков.

В главе II Коши, по-видимому, не зная о вышедшей четырьмя годами раньше работе Больцано, дает свое определение непрерывной на промежутке функции: «Функция $f(x)$ будет между двумя указанными пределами переменной x непрерывной функцией этой переменной, если для всякого значения x, промежуточного между этими пределами, численное значение разности $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно убывает вместе со значением α. Другими словами, *функция* $f(x)$ *остается непрерывной относительно* x *между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной вызывает всегда бесконечно малое приращение самой функции*» [130, с. 68–69; 3, с. 180]. Выдающийся современный историк математики А. П. Юшкевич в [130] пишет: «Определение непрерывности у Коши столь же далеко от «эпсилонтики», как и его определение предела...» [с. 69]. И далее: «Конечно, определение непрерывности у Больцано имеет с точки зрения развитого классического анализа преимущества перед определением Коши. В 30-е годы XIX в. Больцано далеко продвинулся в теоретико-функциональном направлении... Коши теоретико-функциональное направление само по себе не интересовало...; как исследователь, он разрабатывал гораздо более широкую область анализа и его приложений, чем Больцано. Но что касается исходных определений и теорем, то нельзя забывать, что в своих лекциях и руководствах Коши должен был сообразовываться с реальными условиями работы в Политехнической школе. Подготовка ее слушателей была в то время очень скромной... Лекции Коши были по тому времени весьма трудными, а его печатные курсы просто недоступными для большинства слушателей. Эпсилонтика была бы здесь совершенно не к месту, да к ней Коши и не испытывал влечения. Теперь стало известно, как трудно складывались отношения Коши в Политехнической школе и с плохо понимавшей его аудиторией, и с некоторыми влиятельными коллегами (в том числе с П. С. Лапла-

сом), и с администрацией школы. Недаром он смог издать только первый том лекций по исчислению бесконечно малых, а печатание второго, который по его замыслу должен был выйти следом, остановилось на 13-м листе (здесь, между прочим, он дал первое доказательство существования решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при некоторых условиях – доказательство, обобщенное впоследствии Р. Липшицем). Вместе с тем, когда Коши хотел, он проводил доказательства на уровне строгости не менее высоком, чем Больцано. Так, сообщив сначала наглядно-геометрическое обоснование теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, он в прибавлении, посвященном численному решению уравнений, доказал ее чисто аналитически, по-иному, чем Больцано, но с неменьшей строгостью» [130, с. 70–71]. Для доказательства теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции Коши использует метод, аналогичный примененному нидерландским математиком С. Стевином в 1594 г. для отыскания корня алгебраического уравнения с помощью приближений десятичными дробями. По существу, это метод вложенных интервалов, но доказательство не было полным, т. к. не была еще построена теория действительных чисел.

В своих лекционных курсах Коши несколько раз использует в доказательствах «эпсилонтику»; укажем эти случаи. В «Алгебраическом анализе» при доказательстве равенства $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$ в предположении, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=k$, Коши пишет: «Предположим сначала, что величина k имеет конечное значение, и обозначим через ε сколь угодно малое число. Так как при возрастании x разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к пределу k, то можно подобрать число h достаточно большое для того, чтобы при x, превосходящем h, разность, о которой идет речь, постоянно находилась в пре-

делах $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$». Пределы «на языке неравенств» записываются и в случаях $k=+\infty$, $k=-\infty$. Аналогично, используя эпсилонтику, Коши доказывает соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$. В «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (лекция 38) Коши доказывает признак Д' Аламбера сходимости ряда, характеризуя предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\lambda$ неравенствами: для произвольно малого $\varepsilon>0$ отношение $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$ находится между $\lambda-\varepsilon$ и $\lambda+\varepsilon$ при $n\geq m$, где m – достаточно большое число. Один раз (в лекции 7, где доказывается, хотя и не строго, теорема Лагранжа о среднем), Коши даже использует вместе буквы ε и δ для записи с помощью неравенств производной как предела $\lim\limits_{i\to 0}\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=f'(x)$.

Встречающееся у Коши в доказательствах использование эпсилонтики дало основание назвать определения предела и непрерывности функций «на языке $\varepsilon-\delta$» в современных учебниках математического анализа определениями по Коши, несмотря на то, что у самого Коши в соответствующих определениях эпсилонтика отсутствует. Впервые в печати определения предела и непрерывности функции «на языке $\varepsilon-\delta$» появились в лекциях немецкого математика К. Вейерштрасса, которые он читал в 60-х гг. XIX века. Соответствующие определения Коши носят еще кинематический характер, т. к. используется понятие переменной и выражения типа «значения неограниченно приближаются», «значения неограниченно убывают». У Вейерштрасса в определениях отсутствуют эти кинематические понятия, он переводит их на язык неравенств, используя эпсилонтику.

В «Алгебраическом анализе» Коши дает и общее определение функции: если величины y и x связаны между собой так, что по данному значению x можно определить значение y, то x называется независимой переменной, а y – функцией от x. Использование пределов и непрерывных функций позволяет Коши реализовать основное требование его методологии: указывать, при каких условиях и в каких границах справедливо доказываемое утверждение. Он указывает на непрерывность основных элементарных функций в их области определения, но делает это практически без обоснования, т. к. теория непрерывных функций в то время еще не была разработана. Непрерывность функции нескольких переменных Коши неверно понимает как непрерывность по каждой переменной в отдельности.

Разработанная Коши в главе VI «Алгебраического анализа» общая теория рядов (числовых и степенных) уже довольно близка к ее современному изложению в учебниках для вузов. Коши дает определение сходимости ряда через предел частичных сумм $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ ряда. Приводится необходимое условие $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ сходимости ряда, формулируется как очевидный критерий Коши сходимости ряда в терминах стремления к нулю при $n \to \infty$ и любом k выражений вида $S_{n+k} - S_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+k-1}$. (Как уже отмечалось выше, Больцано за четыре года до Коши опубликовал критерий сходимости функциональной последовательности.) В качестве иллюстрации своего критерия Коши доказывает сходимость ряда $1 + x + x^2 + \ldots$ при $|x| < 1$ и расходимость гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$. Коши приводит (с доказательством) свой радикальный признак сходимости ряда $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ с положительными

членами в виде: если наибольший из пределов выражений $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ равен k, то ряд $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ с положительными членами сходится при $k<1$ и расходится при $k>1$ (под словами «наибольший из пределов» Коши имеет в виду верхний предел, т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(u_n)^{\frac{1}{n}}$). Четко формулируется и доказывается признак Д'Аламбера сходимости ряда. Кроме того, Коши доказывает еще следующий свой признак (так называемый «признак сгущения Коши») в виде: ряд $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ с положительными убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\ldots$. И, наконец, для рядов с положительными членами Коши устанавливает так называемый «логарифмический» признак сходимости, который получается сравнением u_n с $\frac{1}{n^a}$. Доказываются теоремы о том, что сумма двух сходящихся рядов с положительными членами, а также произведение таких рядов в смысле Коши («по диагоналям») сходятся. Далее рассматриваются ряды с членами произвольного знака. Коши распространяет радикальный признак и признак Д'Аламбера на исследование абсолютной сходимости рядов. Он доказывает теорему о сложении рядов с членами произвольного знака и теорему, которая носит его имя: произведение абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно к произведению сумм перемножаемых рядов. Более того, на примере, который и сейчас входит в учебники математического анализа, Коши показывает, что требование абсолютной сходимости перемножаемых рядов существенно.

Далее в «Алгебраическом анализе» следует изложение сходимости степенных рядов. Здесь Коши показывает, что степенной ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ сходится на интервале $\left(-\frac{1}{A},\frac{1}{A}\right)$,

где $A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (или $A=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$) и расходится вне этого интервала, приводит примеры, когда $A=1$, $A=0$, $A=+\infty$, а также примеры рядов, сходящихся или расходящихся при $x=\pm\frac{1}{A}$. В 1844 г. Коши распространяет эту теорему на степенные ряды $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ с комплексными членами и вводит радиус сходимости $R=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{|a_n|}\right)^{-1}$. Коши не дает определения верхнего предела, а говорит о «наибольшем пределе». В 1892 г. французский математик Жак Адамар (1865–1963) вновь формулирует и четко доказывает эту теорему Коши, поэтому указанную выше формулу для радиуса сходимости степенного ряда называют формулой Коши–Адамара.

Коши вначале не располагал понятием равномерной сходимости функционального ряда и в разделе о непрерывных функциях в «Алгебраическом анализе» привел неверную теорему: сумма сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной. Далее он утверждает, что сумма степенного ряда непрерывна в интервале его сходимости, что, конечно, верно, но он получает это как следствие своей неверной общей теоремы. На ошибочность формулировки Коши общей теоремы о непрерывности суммы ряда впервые обратил внимание Абель в работе 1826 г., указав соответствующий пример. «Алгебраический анализ» Коши заканчивается рассмотрением двойных рядов и сходимости бесконечных произведений.

Позже в одной работе 1853 г. Коши ввел равномерную сходимость функционального ряда в том смысле, в котором это понятие рассматривается в настоящее время в учебниках математического анализа, и исправил свою ошибку, доказав, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной [137, с. 83]. Математики далеко не сразу обратили внимание на эту работу Коши.

Введение равномерной сходимости связывают с именами немецкого астронома и математика Л. Зейделя (1821–1896) и английского физика и математика Дж. Стокса (1819–1903). Но Зейдель и Стокс в своих работах 1847–1848 гг. впервые рассматривали на самом деле иные виды равномерной сходимости [137, с. 88–92]. Широкое внедрение равномерной сходимости в обычно принятом сейчас смысле (как определял и Коши) связано с лекциями Вейерштрасса.

В «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823) Коши излагает дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных и интегральное исчисление функций одной переменной. Он определяет производную $f'(x)$ функции $y = f(x)$ как предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ при $i \to 0$. Интересно, что и дифференциал функции $f(x)$ он определяет как предел при $i \to 0$ отношения $\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h$, где h – постоянная. Таким образом, $df(x) = f'(x)h$. В частности, при $f(x) = x$ последнее равенство принимает вид $dx = h$, следовательно, $df(x) = f'(x)dx$.

В лекции 7 «Резюме лекций…» Коши приводит теорему Лагранжа о среднем для функции $f(x)$. В то время еще отсутствовало современное простое доказательство теоремы Лагранжа с помощью теоремы Ролля, т. к. последняя была известна тогда лишь для многочлена. Коши получает теорему Лагранжа о среднем как следствие некоторой вспомогательной теоремы, для доказательства которой впервые дает определение $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ на языке неравенств с использованием именно букв ε и δ. В предположении непрерывности $f(x)$ (а в следствии – и $f'(x)$) Коши без какого-либо обоснования считает, что здесь число δ не зависит от x, и использует

это в доказательстве. На эту ошибку Коши обратил внимание Больцано. Но строгое доказательство теоремы Лагранжа о среднем было дано лишь через несколько десятилетий Вейерштрассом, у которого уже имеется общая формулировка теоремы Ролля.

Коши определяет частные производные и дифференциалы функции многих переменных $u = f(x, y, z, \ldots)$, а полный дифференциал записывает в виде

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots = \frac{d_x u}{dx}dx + \frac{d_y u}{dy}dy + \frac{d_z u}{dz}dz + \ldots.$$

В лекции 13 Коши вводит частные дифференциалы высших порядков функции $u = f(x, y, z, \ldots)$, в частности смешанные, и указывает в качестве очевидного равенство $d_x d_y u = d_y d_x u$ (без предположения о непрерывности обеих частей этого равенства), иллюстрируя его на примере функции $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, для которой $d_x d_y u = d_y d_x u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dxdy\cdot$ Теорема о равенстве смешанных производных впервые встречается уже у Эйлера и Клеро в 1740 г., но строгое ее доказательство в предположении непрерывности смешанных производных впервые дал в 1873 г. немецкий математик Г. Шварц.

Первоначально еще у Архимеда в III в. до н. э. определенный интеграл (в виде площади, объема) вычислялся через интегральные суммы. Однако уже в XVII в. у Ньютона и Лейбница при интегрировании в качестве основного понятия выступает неопределенный интеграл, в частности первообразная. Роль определенного интеграла по-прежнему еще выполняют геометрические величины (площадь, объем, длина кривой), но они выражаются или в виде ряда, или в виде разности значений первообразной, а не как предел интегральных сумм. В XVIII в. основной задачей интегрирования было отыскание перво-

образных в элементарных функциях для различных классов аналитических функций. Этот вопрос, по существу, был исчерпан Эйлером. Эллиптические интегралы представляли примеры первообразных, не выражавшихся в элементарных функциях. Существование первообразной (хотя бы и не выражающейся в элементарных функциях) для произвольной аналитической функции считалось очевидным. Определенный интеграл в XVIII в., начиная с Эйлера, представляет вторичное понятие по отношению к неопределенному и определяется как разность значений первообразной для подынтегральной функции.

С введением Больцано и Коши класса непрерывных функций сразу же возникает необходимость доказательства существования интеграла для таких функций. При этом на первый план в теории интегрирования выдвигается понятие определенного интеграла, а понятие неопределенного интеграла становится вторичным. Заслуга в такой перестановке ролей определенного и неопределенного интегралов и построение теории интегрирования непрерывных функций принадлежит Коши. В «Резюме лекций…» он сначала вводит определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[x_0, X]$ функции $f(x)$ как предел интегральной суммы

$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

когда длины $x_i - x_{i-1}$ частичных отрезков разбиения отрезка $[x_0, X]$ точками $x_0, x_1, \ldots, x_n = X$ «становятся бесконечно малыми». Коши доказывает существование определенного интеграла для любой непрерывной функции $f(x)$, но его доказательство не является строгим, т. к. он фактически пользуется свойством равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, т. е. теоремой Кантора, без какого-либо ее обоснования. (Только в 1870 г. немецкий математик Г. Э. Гейне ввел понятие равномерной непрерывности функции и доказал теорему Кантора.) Коши обозначает определенный интеграл в виде

$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)dx$, указывая, что такое обозначение принадлежит Фурье. Коши показывает, что для непрерывной функции $f(x)$ получается то же значение интеграла, если в интегральной сумме брать значения функции $f(x)$ в произвольной точке на отрезках разбиения.

Коши доказывает свойства определенного интеграла (в том числе линейность, аддитивность относительно функции и относительно отрезка интегрирования) с помощью определения интеграла как предела интегральных сумм. Таким образом, Коши строит определенный интеграл независимо от дифференцирования. Неопределенный интеграл от непрерывной функции он вводит как определенный интеграл с переменным верхним пределом и доказывает, что этот интеграл является непрерывной функцией и что производная по верхнему пределу равна подынтегральной функции. Доказывает он и формулу Ньютона–Лейбница. Коши дает определение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особенностями $x = a$ и $x = b$ как предела $\lim\limits_{\substack{\xi_1 \to a \\ \xi_2 \to b}} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx$, а также определение несобственного интеграла с особенностями внутри промежутка интегрирования. Он вводит понятие о главном значении несобственного интеграла и иллюстрирует его на примере интеграла $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$. Коши рассматривает (без обоснования и в других обозначениях) вопросы о дифференцировании интегралов $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ и $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ по параметру y (не говоря об условиях на $f(x,y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$) и об интегрировании интеграла $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ по

y в предположении непрерывности $f(x,y)$ по обеим переменным. Дифференцированию и интегрированию интегралов по параметру в случае аналитической функции $f(x,y)$ была посвящена работа Эйлера 1775 года.

В лекции 39 «Резюме лекций…» Коши приводит свой знаменитый пример функции $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0)=0$, не совпадающей при $x\neq 0$ с ее рядом Тейлора в точке $x_0=0$. Этот пример Коши приводится и в современных учебниках анализа. В заключительной 40-й лекции Коши приводит теорему о почленном интегрировании функционального ряда в предположении одной лишь непрерывности его членов, но в таком виде теорема и ее доказательство Коши неверны. Правильную теорему с учетом равномерной сходимости ряда впервые высказал Вейерштрасс, о чем упоминает Гейне в своей работе 1870 г., а Г. Дарбу очень детально исследовал этот вопрос в 1875 году.

В дополнении Коши приводит свою формулу из дифференциального исчисления в виде

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-f(x_0)}=\frac{f'\left[x_0+\theta(X-x_0)\right]}{F'\left[x_0+\theta(X-x_0)\right]},\ 0<\theta<1,$$

в предположении непрерывности производных $f'(x)$, $F'(x)$. Далее он получает формулу Тейлора с остаточным членом $\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}h^n f^{(n)}(x_0+\theta h)$ (т. е. в форме Коши), где $h=x-x_0$, $0<\theta<1$, и применяет ее к функции $f(x)=(1+x)^\mu$.

В рамках реформы анализа Коши осуществляет также перестройку теории дифференциальных уравнений. До Коши основной задачей теории дифференциальных уравнений было отыскание общего решения дифференциального уравнения в квадратурах (т. е. при помощи

элементарных функций или взятия неопределенного интеграла конечное число раз), или в виде ряда. Не подвергалось сомнению существование общего решения дифференциальных уравнений, а отыскание частных решений было второстепенной задачей. Заслуга Коши в том, что он обратил этот порядок, поставив на первое место доказательство существования или отыскания частных решений при заданных начальных условиях (задача Коши). Этим он положил начало новому этапу развития теории дифференциальных уравнений. О его методах в этом вопросе: [156, с. 28–46; 109, с. 83–93].

Первый метод Коши доказательства существования частного решения относится к уравнению $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$. Он изложен в лекциях курса анализа, читанного Коши студентам Политехнической школы второго года обучения (1823–1824). Этот курс, продолжающий «Резюме лекций…», не был напечатан, сохранилась лишь корректура первых 13 страниц, опубликованная только в 1981 году. В предположении непрерывности $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на $[x_0, X]$ Коши отправляется от метода ломаных Эйлера, в котором искомая интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), аппроксимируется ломаной с вершинами в точках (x_i, y_i), $i = 0,1,\ldots,n$, где $x_n = X$, $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, $i = 1,2,\ldots,n-1$; $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1})$, поэтому

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1})$$

.

Коши доказывает существование предела $y(X) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и то, что $y(X)$ является значением искомого решения $y(x)$ при $x = X$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Это доказатель-

ство содержится и в записи лекций Коши, опубликованных в 1844 г. его учеником Ф. Муаньо. В 1876 г. немецкий математик Р. Липшиц (1832–1903) усовершенствовал теорему и доказательство Коши, заменив условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ так называемым условием Липшица по переменной y. Французский математик Э. Пикар (1856–1941) в 1888 г. распространил метод Коши–Липшица на уравнение в комплексной области. Итальянский математик Дж. Пеано (1858–1932) в 1890 г. доказал теорему существования по крайней мере одного (т. е. не обязательно единственного) решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, при условии непрерывности $f(x, y)$.

Второй метод Коши носит название метода мажорант. Обратившись к разработке теории функций комплексной переменной, одним из главных создателей которой он является, Коши в 1831 г. получил с помощью комплексного интегрирования теорему о разложении функции комплексной переменной в степенной ряд. Эта теорема дает признак аналитичности функции комплексной переменной и, кроме того, она устанавливает, что полученный степенной ряд мажорируется некоторой геометрической прогрессией. В мемуаре по небесной механике 1841 г. Коши приводит необходимые для мажорирования степенных рядов формулы вычисления максимума и минимума модуля функции комплексной переменной на произвольной окружности в плоскости комплексной переменной. В этом же мемуаре Коши для системы дифференциальных уравнений вида $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{T}$, где X_i, T – известные функции, с помощью своего метода мажорант оценивает ряды, выражающие интегралы для этой системы уравнений, и доказывает общие теоремы о выражении таких интегралов степенными рядами. Коши уточняет и обобщает этот метод в ряде своих даль-

нейших работ. Современную форму метод мажорант в применении к обыкновенным дифференциальным уравнениям получил у его учеников Брио и Буке в 1856 года. Независимо от Коши и по-иному, без помощи интегрирования, метод мажорант для степенных рядов в комплексной области разработал Вейерштрасс. Этот метод применила С. В. Ковалевская в 1874 г. в аналитической теории дифференциальных уравнений с частными производными (теорема Коши–Ковалевской).

В мемуаре 1835 г. Коши применяет метод последовательных приближений для приближенного представления решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Впоследствии ряд авторов использовали метод последовательных приближений для доказательства существования решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными (Муаньо, Лиувилль, Фукс, Пеано и др.), но наиболее полно метод последовательных приближений с этой целью разработал в 1890–1891 гг. французский математик Э. Пикар (1856–1941). Его доказательство теоремы существования решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка приводится и в современных учебниках дифференциальных уравнений.

Коши является одним из главных создателей основ теории функций комплексной переменной. Некоторые элементы этой науки, которую и в XIX в. рассматривали как часть анализа, имелись уже у его предшественников. Эйлер, поясняя понятие переменной величины, писал, что «даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины». Он рассматривал некоторые элементарные функции и их свойства в комплексной области (e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$ и др.). Д'Аламбером и Эйлером были получены дифференциальные уравнения, связывающие действительную и мнимую части функции комплексного переменного, сыгравшие большую роль в исследованиях Коши и Римана и получившие название условий Коши–Римана

аналитичности функции. Эйлер и Лаплас широко использовали переход в комплексную область для вычисления определенных интегралов. У Лапласа уже имеются формулы, выражающие коэффициенты степенного ряда в комплексной области через интегралы по окружности. Гаусс, как это видно из его письма 1811 г. к Бесселю, имел представление об интегрировании по кривой в комплексной плоскости и уже владел интегральной теоремой, которую позже открыл Коши. Но Гаусс не опубликовал этих своих соображений. Систематическая разработка теории функций комплексной переменной, по существу, начинается с Коши.

Первым важным результатом Коши в теории аналитических функций была интегральная теорема, которая носит его имя. Простейший ее вариант (для интеграла по прямоугольному контуру) Коши получил следующим образом. Первый шаг в этом направлении Коши делает в «Мемуаре по теории определенных интегралов» (1814). Здесь Коши исходит из формулы

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dxdy,$$

которую рассматривал еще Эйлер. Аналитическая функция $F(x+iy) = S(x,y) + iV(x,y)$ удовлетворяет уравнениям Коши–Римана $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Полагая $f(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$, Коши получает

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\,dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\,dxdy,$$

откуда

$$\int_{x_0}^{X}\left[V(x,Y)-V(x,y_0)\right]dx=\int_{y_0}^{Y}\left[S(X,y)-S(x_0,y)\right]dy.$$

Аналогично, если положить $f(x,y)=\frac{\partial S}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$, получается

$$\int_{x_0}^{X}\left[S(x,Y)-S(x,y_0)\right]dx=-\int_{y_0}^{Y}\left[V(X,y)-V(x_0,y)\right]dy.$$

В одной заметке 1822 г. Коши объединяет эти две формулы в одну, умножая первую из них на i и складывая со второй. Таким образом, для функции $F(x+iy)=S+iV$ получается формула

$$\int_{x_0}^{X}F(x+iY)dx-\int_{x_0}^{X}F(x+iy_0)dx=\int_{y_0}^{Y}F(X+iy)idy-\int_{y_0}^{Y}F(x_0+iy)idy,$$

или окончательно

$$\int_{y_0}^{Y}F(x_0+iy)idy+\int_{x_0}^{X}F(x+iY)dx=\int_{x_0}^{X}F(x+iy_0)dx+\int_{y_0}^{Y}F(X+iy)idy.$$

Последнее соотношение представляет интегральную теорему Коши в частном случае интеграла от функции $F(z)$ комплексной переменной по прямоугольному контуру (рис. 6), именно:

$$\int_{ADC}F(z)dz=\int_{ABC}F(z)dz,$$

или, как принято записывать в настоящее время, $\int_{ABCD}F(z)dz=0$. От функции $F(z)$ Коши требует, чтобы она не обращалась в ∞ внутри и на границе прямоугольника, показывая на примерах, что в противном случае разность интегралов по путям ADC и ABC отлична от нуля.

В «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825) Коши получает интегральную теорему в

общей формулировке, рассматривая в качестве путей интегрирования, соединяющих точки (x_0, y_0) и (X, Y), непрерывные кривые внутри прямоугольника. В этом мемуаре он прежде всего определяет интеграл $\int_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)dz$ $(z = x + iy)$ как предел интегральной суммы по аналогии с интегралом от функции действительной переменной.

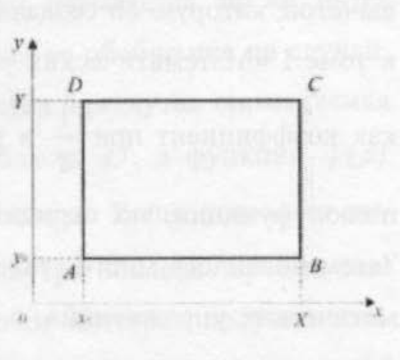


Рис. 6

Полагая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ и ψ – непрерывные монотонные при $t_0 \le t \le T$ функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$, $\varphi(T) = X$, $\psi(T) = Y$, Коши сводит интеграл $\int_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)dz$ к интегралу по кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и записывает его в виде определенного интеграла $\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t) + i\psi(t))[\varphi'(t) + i\psi'(t)]dt$. Затем он формулирует интегральную теорему в общем виде: интеграл от функции комплексной переменной, непрерывной и конечной в прямоугольнике, не зависит «от природы функций» $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (т. е. от выбора пути интегрирования между данными точками прямоугольника). Коши доказывает эту теорему с помощью вариационного исчисления, но его доказательство не является полным. Французский математик Э. Гурса (1858–1936) в 1884 г. дал полное доказательство этой теоремы Коши.

Уже в мемуаре 1814 г. Коши рассматривает многочисленные примеры, в которых ищет разность между интегралами, взятыми по двум путям с общим началом и концом, между которыми лежат полюсы функции. Это послужило для него поводом к введению термина

«вычет» (франц. résidu, буквально: остаток) и к разработке теории вычетов, которую он создал в 1826–1829 годах. В одной статье 1826 г. в томе I «Математических упражнений» Коши уже определяет вычет как коэффициент при $\frac{1}{\varepsilon}$ в разложении функции $f(z_0+\varepsilon)$, где z_0 – полюс функции, по отрицательным и положительным степеням ε. Затем появилось много статей Коши в следующих трех томах «Математических упражнений», в этих статьях он рассматривает приложения теории вычетов к вычислению интегралов, дифференциальным уравнениям, разложению функций в ряды и др.

Как уже говорилось выше, Коши на основе понятия предела разработал теорию рядов, в которой главное внимание уделяет их сходимости. Степенные ряды он рассматривает и в комплексной области и получает формулу для радиуса сходимости (формула Коши–Адамара). Коши выступает против выдвинутой Лагранжем концепции введения производных через коэффициенты степенного ряда, ссылаясь и на свой пример функции $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0)=0$, не совпадающей при $x\neq 0$ с суммой $S(x)$ ее ряда Тейлора в точке $x_0=0$, т. к. здесь $S(x)=0$ для всех действительных x.

В 1831 г. Коши получает теорему о том, что функция комплексной переменной разлагается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, радиус сходимости которого равен расстоянию от нуля до ближайшей особой точки функции. Заодно указывается мажоранта для этого ряда в виде геометрической прогрессии. Коши основывает доказательство теоремы на своем представлении функции $f(z)$ в виде интеграла $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ по окружности в комплексной плоскости с

центром в точке z. (Мы привели формулу Коши в современной записи.) Эта интегральная формула Коши называется также интегралом Коши, как и полученное после Коши ее обобщение на случай, когда вместо окружности C берется простая замкнутая спрямляемая жорданова кривая γ, ограничивающая область D, а функция $f(z)$ аналитическая в D и на ее границе γ. Интеграл Коши позволяет выразить значения аналитической функции внутри области через ее значения на границе области. После Коши этот интеграл получил многочисленные применения в XIX и XX вв. в математике, теоретической физике и механике. Выше уже говорилось о применении метода мажорант Коши в дифференциальных уравнениях. В отношении условий на функцию $f(z)$ в теореме о разложении функции в степенной ряд у Коши не было полной ясности, он возвращается к этой теореме в ряде своих работ, дополняет теорему требованием непрерывности $f'(z)$, а позже снимает это требование. Почленное интегрирование ряда не получает у Коши обоснования, на это обстоятельство у Коши обратил внимание П. Л. Чебышёв в 1844 г., но не исправил его.

Важную теорему о том, что целая аналитическая функция, ограниченная по модулю во всей плоскости, является постоянной, называют теоремой Лиувилля. Но доказал ее впервые в таком виде Коши в 1844 г., а Лиувилль установил раньше в том же году аналогичную теорему при дополнительном требовании двоякой периодичности функции, т. е. частный случай. Лиувилль использовал свою теорему в теории эллиптических функций, которой, в отличие от Коши, занимались многие крупные математики XIX в., поэтому указанная теорема Коши получила название теоремы Лиувилля.

Коши принадлежат исследования и в других областях математики, в том числе в алгебре. Он является основателем теории конечных групп, т. к. привел в систему и развил дальше начатое Лагранжем исследование свойств группы подстановок (1815 г. – два мемуара,

большой мемуар 1844–1846 годов). А любая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе группы S_n подстановок n объектов. Коши ввел двухстрочное обозначение подстановки, которое затем сократил до $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, а позже подстановки обозначал и одной буквой. Он дал определение порядка подстановки $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ как наименьшего натурального m такого, что $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^m$ есть тождественная подстановка. Циклическая группа – это группа, все элементы которой являются степенями одного из ее элементов, такой элемент называется порождающим элементом циклической группы. Порядок циклической группы (т. е. число ее элементов) совпадает с порядком порождающего ее элемента. Коши изучил циклические группы для группы подстановок. В конечной группе порядок подгруппы является делителем порядка группы (теорема Лагранжа). В 1844 г. Коши доказал теорему: если порядок группы делится на простое число p, то в группе есть элемент порядка p (значит, и подгруппа порядка p). Эта теорема носит имя Коши, но ранее ее высказал без доказательства Галуа, который впервые употребил и сам термин «группа» (Коши не пользовался этим термином). Бинэ и Коши принадлежат первые полные изложения теории определителей (1812 год). Затем Коши посвятил теории определителей еще 14 мемуаров, превратив ее в самостоятельный раздел алгебры. В мемуаре 1812 г. у Коши впервые в общем виде сформулирована и доказана теорема Лапласа о представлении определителя в виде суммы произведений его миноров на алгебраические дополнения этих миноров.

Долгое время комплексные числа не имели строгого обоснования как числовая система. Постулировалось, что над комплексными числами можно производить арифметические операции по тем же

правилам, что и над действительными числами, но с учетом того, что $i^2 = -1$. При возросшем в XIX в. уровне строгости это требовало обоснования.

Современное арифметическое определение комплексных чисел как пар (a,b) действительных чисел, каждая из которых упорядочена и указаны арифметические операции над парами, дал в 1837 г. ирландский математик У. Р. Гамильтон. Алгебраическое обоснование операций над комплексными числами дал Коши в «Мемуаре о теории алгебраических сравнений, заменяющих теорию мнимых» (1847). Покажем, например, как Коши вводит правило умножения комплексных чисел. Многочлен $f(x) = (a+bx)(c+dx)$ при действительных a, b, c, d, x можно, раскрыв скобки, записать следующим образом:

$$f(x) = (ac - bd) + (ad + bc)x + bd(x^2 + 1).$$

Запишем это равенство в виде алгебраического сравнения:

$$f(x) \equiv \varphi(x)\left(\operatorname{mod}(x^2+1)\right), \text{ где } \varphi(x) = (ac - bd) + (ad + bc)x.$$

Здесь $\varphi(x)$ есть вычет функции $f(x) = (a+bx)(c+dx)$ по модулю многочлена x^2+1, т. е. остаток от деления $f(x)$ на x^2+1. Коши, по определению, полагает значение функции $f(x)$ равным ее вычету $\varphi(x)$ по модулю x^2+1, когда вместо x подставляется символ i, с помощью которого вводятся комплексные числа. Как вычеты по $\operatorname{mod}(x^2+1)$ он определяет также сумму, разность и частное комплексных чисел.

Таким образом, Коши не предполагает заранее существования поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а определяет его, введя операции в нем с помощью вычетов алгебраических сравнений многочленов в $\mathbb{R}$ по модулю многочлена x^2+1, где вместо x берется символ i. После

введения операций в $\mathbb{C}$ значение $i^2 = -1$ находится в результате решения уравнения $z^2 = -1$, где $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Коши посвятил около 10 статей математической обработке результатов наблюдения. Его имя носит распределение вероятностей случайной величины с плотностью $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, полученное для плотности распределения погрешностей наблюдений (в работе 1853 года). Ранее это распределение встречается у Пуассона в 1830 году.

Коши принадлежат также работы по теории чисел, геометрии, теории упругости, оптике, астрономии.

О Коши: [113; 224; 114; 140, с. 98–103; 5; 130, с. 65–72; 79, гл. IV; 136, с. 54–68; 108, с. 123–127, с. 141–146; 109, с. 83–93; 156, с. 28–46; 241; 242].

Фурье

Одним из основных объектов изучения в математике XIX в. были тригонометрические ряды. Они встречаются уже в XVIII в. у Л. Эйлера, Д. Бернулли и А. Клеро. Но систематически использовать их начал в первом десятилетии XIX в. выдающийся французский математик **Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830)**. Он родился в г. Оксер в семье портного, в восьмилетнем возрасте остался круглым сиротой, был определен в военную школу и по ее окончании начал преподавать там математику. В 1796–1797 гг. преподавал в Политехнической школе, где возглавлял кафедру анализа бесконечно малых. Он был прекрасным лектором. В 1798–1799 гг. Фурье, как и Монж, принимал участие в египетском походе Наполеона. В 1801 г. Фурье вернулся во Францию. В 1802 г. получил титул барона, орден Почетного легиона и должность префекта (представителя правительства) в департаменте Изер. В течение четырнадцати лет работал в этой должности и жил в Гренобле,

а в 1817 г. переехал в Париж, будучи избран в члены Парижской АН. С 1822 г. Фурье – непременный секретарь секции математики в этой академии. Он собрал вокруг себя небольшой кружок молодых талантливых математиков.

Первые работы Фурье относятся к численному решению алгебраических уравнений. Главная его работа – «Аналитическая теория тепла», которую он писал еще в 1807–1811 годах. В 1812 г. получил за нее премию Парижской АН, но работу не напечатали, сочтя недостаточно строгой и законченной. Он опубликовал ее в 1822 г., когда стал непременным секретарем академии. Эта работа сыграла очень большую роль в дальнейшем развитии математического анализа и математической физики. В ней он вывел уравнение теплопроводности и решил его при различных граничных условиях с помощью тригонометрических рядов методом разделения переменных. На примерах он показал, как представлять тригонометрическими рядами функции, заданные на различных промежутках различными аналитическими выражениями. Рядом Фурье функции $f(x)$, интегрируемой на $(0,2\pi)$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{, где } a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx.$$

Тригонометрические ряды с такими коэффициентами Риман назвал рядами Фурье. У Фурье встречаются и разложения в ряд и по бесселевым функциям.

В своей работе Фурье нашел также формулу представления функции с помощью тригонометрического интеграла (интеграла Фурье). И хотя его попытка доказать, что любую функцию можно

представить в виде тригонометрического ряда, была неудачной (это можно сделать лишь при некоторых дополнительных условиях), но тем самым возникла проблема об условиях разложения функций в тригонометрические ряды, которой в XIX в. и даже в XX в. занимались многие выдающиеся математики. Это привело к развитию понятия функции, интеграла, возникновению теории множеств и созданию теории функций действительной переменной. Работа Фурье стимулировала также развитие математической физики.

Одним из достоинств указанной главной работы Фурье является и то, что здесь Фурье дал уже довольно общее определение функции: «Вообще функция $f(x)$ представляет собой последовательность значений или ординат, каждая из которых произвольна… Совсем не предполагается, что эти ординаты подчиняются общему закону; они могут следовать совершенно произвольно, и каждая из них задается как если бы она была единственной величиной…». Далее он отмечает, что это «строго применимо и к разрывным функциям» [137, с. 42]. И хотя Фурье работал лишь с функциями, имеющими конечное число разрывов на конечном промежутке, несомненно, что он признал бы функцией появившийся позже пример Дирихле всюду разрывной функции.

Отметим еще, что Фурье в 1819 г. ввел современное обозначение определенного интервала в виде $\int\limits_a^b f(x)dx$, выгодно отличающееся от обозначения Эйлера $\int Pdx \begin{bmatrix} ab & x=a \\ ad & x=b \end{bmatrix}$.

О Фурье: [140, с. 84–86; 99, с. 71–74; 5, с. 351–353; 20; 137, с. 42–43; 74, гл. 12].

— Пуассон —

Выдающийся французский механик, физик и математик **Симеон Дени Пуассон (1781–1840)** родился в семье мелкого провинциального чиновника, занявшего более высокое положение в годы французской революции. В 1800 г. Пуассон окончил Политехническую школу. Он публикует свои первые работы и становится репетитором этой школы, а с 1806 г. – профессором, заняв место Фурье, оставившего преподавание. С 1816 г. Пуассон работает в должности профессора рациональной механики в Парижском университете.

Пуассон опубликовал около 350 работ, уступая в XIX в. по числу публикаций разве лишь Коши. Однако работы Пуассона, по выражению Ф. Клейна, «из-за велеречивости читаются с трудом». Тем не менее, его двухтомный «Курс механики» (1811) был в XIX в. долгое время одним из лучших учебников механики и выдержал много изданий. Научные интересы Пуассона были очень разносторонними – общая и небесная механика, математическая физика (теория упругости, теплопроводность, капиллярность, электричество и магнетизм), теория вероятностей и некоторые вопросы анализа (интегралы в комплексной области, уравнения в конечных разностях и др.). В механике он использовал при записи уравнений движения импульсы $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, где $L = T - \Pi$, а $\dot{q}_k$ – обобщенные скорости. При рассмотрении интегралов движения он ввел так называемые «скобки Пуассона», которые определяются для двух функций $\varphi(t,q_i,p_i)$, $\psi(t,q_i,p_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, следующим образом:

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right), \text{т. е. } (\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q_i,p_i)}.$$

Функция $f(t,q_i,p_i)$ называется интегралом уравнений движения $\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, если $f(t,q_i,p_i)=C$ для любых движений. Необходимое и достаточное условие того, что функция f – интеграл уравнений движения, имеет вид $\frac{\partial f}{\partial t}+\left(f,H\right)=0$. Теорема Якоби–Пуассона утверждает, что если f и g – интегралы уравнений движения, то (f,g) – также интеграл этих уравнений.

В работе 1813 г. Пуассон вывел названное его именем уравнение $\Delta u=4\pi\rho$, которому удовлетворяет потенциал поля тяготения в случае, когда притягивающая точка находится внутри тела. Уравнение $\Delta u=0$ для потенциала тяготения внешних точек тела ранее было выведено Лапласом. Теории потенциала посвящены также работы Пуассона «О притяжении сфероидов» (1829) и «О притяжении однородных эллипсоидов» (1835). Имя Пуассона носит интеграл вида

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

где r и φ – полярные координаты. Функция $u(r,\varphi)$ является решением задачи Дирихле для круга $D=\{(r,\varphi):0\le r<R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$, т. е. гармоническая в D (удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$ в D), непрерывна в замыкании D и совпадает на границе круга D с заданной функцией $f(\theta)$. Этот интеграл был впервые рассмотрен Пуассоном в 1823 году.

В теории вероятностей с именем Пуассона связано введение в 1837 г. термина «закон больших чисел». Смысл этого закона Пуассон видел в приближенном равенстве среднего арифметического большого числа случайных величин среднему арифметическому их математических ожиданий. Однако Пуассон лишь обобщил в 1837 г. теорему Бернулли на

случай независимых испытаний, в которых событие A появляется с вероятностью, зависящей от номера испытания. Имя Пуассона носит также одна из предельных теорем теории вероятностей, дающая приближенное распределение числа наступления некоторого редкого (маловероятного) события при большом числе независимых испытаний. В этой теореме фигурирует так называемое распределение Пуассона $p(k,\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ некоторой случайной величины. Термина «случайная величина» у Пуассона еще нет, но он делает первый шаг к введению этого понятия, когда пишет о «некоторой вещи», которая может принимать значения $a_1,\ldots,a_n$ с вероятностями соответственно $p_1,\ldots,p_n$. Как уже упоминалось выше, Пуассон более чем за 20 лет до Коши нашел распределение вероятностей с плотностью $p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, которое не вполне оправданно называют распределением Коши. Имя Пуассона носит следующая формула суммирования: если $f(y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi ixy}F(x)dx$ (это преобразование Фурье функции $F(x)$, записанное несколько по-иному, чем обычно), то $\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)$. Пуассону принадлежит очень простой способ вычисления интеграла Эйлера–Пуассона $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ с помощью двойного интеграла, ранее (в 1778 г.) эту идею использовал Лаплас.

О Пуассоне: [140, с. 83; 107, с. 199–205; 13; 19; 20].

— Абель —

Гениальный норвежский математик **Нильс Хенрик Абель (1802–1829)** прожил короткую жизнь, не обеспеченную материально в

ее творческий период. Он родился в деревушке Финней на юге Норвегии в семье пастора. Через два года семья переехала в г. Иерстад. Начальную школьную подготовку получил у отца, а в 1815 г. поступил в кафедральную школу в Христиании – столице Норвегии (с 1924 г. – Осло). В школе на его необыкновенное математическое дарование обратил внимание молодой учитель математики Б. М. Хольмбое, хорошо знавший и высшую математику. В 1820 г. отец Абеля умер, оставив вдову с шестью детьми. Абель был вынужден обеспечивать не только себя, но и оказывать материальную помощь своим братьям и сестре. Однако за свою творческую научную деятельность, продолжавшуюся всего около восьми лет, Абель получил выдающиеся результаты в математике, которые оказали большое влияние на ее дальнейшее развитие и выдвинули Абеля в ряд крупнейших математиков.

Уже в старших классах школы Абель проявил свои гениальные математические способности, проглатывая одну за другой книги известных математиков. В 1819 г. его школьный учитель математики Хольмбое написал о нем в своем докладе: «Несомненный математический гений». В 1821 г. Абель поступил в университет в Христиании. Новый университет не имел средств для выплаты стипендии. Абелю было предоставлено общежитие, а несколько университетских преподавателей начали выплачивать Абелю стипендию из своих личных средств, «дабы сохранить для науки это редкое дарование». Уже с начала обучения в университете Абель публикует свои первые работы. Он совершает в 1823 г. поездку в Копенгаген, там он занимается Великой теоремой Ферма и размышляет над проблемой обращения эллиптических интегралов. Еще в школе Абель написал работу, в которой, как ему казалось, он нашел формулу, выражающую корни общего уравнения 5-й степени через радикалы, но некоторое время спустя убедился, что она неверна. Вернувшись из Копенгагена, Абель пишет (на французском языке, как и почти все дальнейшие работы)

большой мемуар, в котором доказывает, хотя еще и не вполне строго, невозможность решения в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени. Но удалось напечатать в 1824 г. лишь сокращенный вариант мемуара в виде брошюры, которая в то время не получила известности. Благодаря своим успехам Абель стал гордостью университета, ему была предоставлена стипендия для поездки в Берлин и Париж с целью дальнейшего совершенствования в математике.

С сентября 1825 г. по февраль 1826 г. Абель находится в Берлине. Большой удачей было то, что там он близко познакомился с талантливым инженером-строителем **А. Крелле (1780–1855)**, который тогда задумал издавать «Журнал чистой и прикладной математики». Этот «Журнал Крелле» сыграл большую роль в деле развития именно чистой математики, в нем печатали свои работы многие выдающиеся математики. В первом же номере журнала в 1826 г. вышло 6 статей и заметок Абеля, написанных за три месяца пребывания в Берлине. Среди них – замечательная работа «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четырех», которая принесла Абелю известность в математическом мире. Была напечатана также работа Абеля о биномиальном ряде. К Гауссу, который в Гёттингене вел замкнутый образ жизни, Абель не решился заехать. Весной и летом 1826 г. Абель, присоединившись к своим норвежским друзьям, совершает увлекательное путешествие по Европе в Италию. В середине лета 1826 г. он едет в Париж, где остается до конца года.

Пребывание в Париже для Абеля было трудным, т. к. он остался почти без денег и почти без друзей. Математик Сеги, с которым Абель познакомился в Париже, так писал о нем: «Абель одинаково хорошо говорил на французском, немецком, датском и норвежском языках. Он был немного выше среднего роста, на его худощавом, болезненном лице лежала печать утомления и тревоги. Держался он с необычайной

скромностью и легко терялся, проявляя удивительную мягкость характера. Судя по простоте, с которой он одевался, по тому, что он позволял себе покупать какую-нибудь еду не более одного раза в день и довольствовался весьма бедной квартирой на улице Сент-Маргерит, он располагал очень скудными средствами» [115, с. 196].

Чистой математикой в то время там занимались Коши и Лежандр. Но завязать знакомство с Коши Абелю не удалось, а с Лежандром была лишь мимолетная встреча. Ведя крайне скромный образ жизни, Абель упорно трудится, приступив к исследованию интегралов от алгебраических функций, эти интегралы позже получили название абелевых. В октябре 1826 г. он представил в Парижскую АН свой «Мемуар об общих свойствах весьма широкого класса трансцендентных функций», т. е. абелевых интегралов (в частности гиперэллиптических), где доказал свою знаменитую теорему сложения таких интегралов. Мемуар поручили рассмотреть Лежандру и Коши, а письменный отзыв должен был дать Коши. Но тщетно Абель ждал отзыва. Мемуар был довольно объемным (опубликованный уже после смерти Абеля, он занял 67 страниц). Лежандр, находясь в преклонном возрасте, осуществлял второе издание своего двухтомного трактата по эллиптическим интегралам, а Коши, никогда не занимавшийся этой тематикой и будучи поглощенным своей работой, отложил рукопись Абеля, а затем забыл о ней. Отсутствие своевременного признания заслуг Абеля столь крупными математиками сыграло в дальнейшей жизни Абеля трагическую роль [115, с. 191–192].

В начале 1827 г. Абель возвращается в Христианию. Там его ждало большое разочарование: ему не предоставили должности в университете или каком-либо ином учебном заведении. Он оказался в большом финансовом затруднении. Назначенной ему из средств университета стипендии (такой же, как и в студенческие годы) не хватало на то, чтобы расплатиться с долгами. Он вынужден был подра-

батывать уроками, а некоторое время заменял профессора, уехавшего в экспедицию. «Я беден как церковная мышь», – писал он в одном из писем [115, с. 256].

Уже в конце своего пребывания в Париже Абель начинает разрабатывать теорию эллиптических функций, исследуя функцию, обратную к интегралу $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$, и некоторые связанные с ней функции, не зная о результатах Гаусса, который ничего не публиковал по этому вопросу. Абель пишет большой труд в двух частях «Исследования об эллиптических функциях». Первая часть была опубликована в сентябре 1827 г. Полнейшей неожиданностью для Абеля явилось то, что вслед за этой его публикацией начали выходить работы выдающегося немецкого математика К. Г. Якоби (1804–1851), посвященные эллиптическим интегралам и эллиптическим функциям. Якоби помогло знакомство с результатами Абеля. Весь 1828 год проходит в напряженнейшем соревновании Абеля и Якоби, которые спешат изложить и опубликовать свои результаты по построению теории эллиптических функций. В мае 1828 г. Абель публикует работу, в которой ставит и решает общую задачу преобразования эллиптических функций, включающую как частный случай результаты Якоби. По поводу этой работы Якоби писал Лежандру: «Статья Абеля настолько превосходит все, что я сделал, что она выше моих похвал». Высокую оценку Гауссом работы Абеля мы привели на с. 38.

Затем Абель публикует вторую часть своих «Исследований об эллиптических функциях», а в 1829 г. выходит его «Очерк теории эллиптических функций». Якоби в 1829 г. публикует свою книгу «Новые основания эллиптических функций», где вводит так называемые тэта-функции в виде тригонометрических рядов и через них выражает все другие эллиптические функции.

В декабре 1828 г. Абель сильно простудился во время 300-мильной поездки к невесте и друзьям. Тяжелая пневмония перешла в острую форму туберкулеза, признаки которого были заметны и раньше, а 6 апреля 1829 г. Абель умер в возрасте неполных 27 лет. Через несколько дней после смерти Абеля от Крелле пришло сообщение о том, что Абелю предоставляют должность в Берлине. Якоби напомнил Лежандру о мемуаре Абеля, представленном в 1826 г. в Парижскую АН. Лежандр сообщил на заседании академии о смерти Абеля, Коши разыскал у себя мемуар Абеля, в течение недели подготовил отзыв и прочел его на заседании 29 июня 1829 года. Напечатан мемуар Абеля был только в 1841 году. В 1830 г. Абель (посмертно) и Якоби были удостоены Большой прěмии Парижской АН как основатели теории эллиптических функций. Очень подробно жизнь и творчество Абеля описаны в книге видного норвежского математика О. Оре [115].

Главные работы Абеля посвящены теории рядов, абелевым интегралам, эллиптическим функциям и вопросу разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Он внес вклад в реформу математического анализа, т. к. одним из первых выступал против незаконного использования расходящихся рядов и первым исследовал вопрос о непрерывности суммы степенного ряда. В работе «Исследования о ряде $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$ и т. д.» (1826), где предполагается, что x и m могут быть и комплексными, Абель устанавливает несколько теорем для рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, в частности теорему IV, которую в настоящее время расчленяют на две и называют первой и второй теоремами Абеля. Из них большой интерес представляет вторая теорема Абеля, в которой он впервые устанавливает (мы

приводим это в современной формулировке), что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_0 на границе круга сходимости, то его сумма непрерывна на радиусе $[0, z_0]$ круга сходимости (понятием равномерной сходимости Абель не располагал). Здесь же Абель указывает на ошибку Коши, утверждавшего в «Алгебраическом анализе», что сумма функционального ряда непрерывных функций является непрерывной. Абель отмечает, что это верно для степенных рядов в области сходимости, а то, что в общем это неверно, показывает на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, его сумма $S(x)=\frac{x}{2}$ при $-\pi<x<\pi$, $S(-\pi)=S(\pi)=0$, $S(x)$ имеет период 2π. Члены этого ряда непрерывны всюду, а $S(x)$ разрывна в точках $x=(2m+1)\pi$, m – целое. Выше уже говорилось, что Коши, введя понятие равномерной сходимости ряда в 1853 г., исправил свою ошибку. В теории рядов известны также признак Абеля сходимости ряда и теорема Абеля о произведении (в форме Коши) двух числовых рядов. У Абеля не было идеи обобщенного суммирования рядов, но одна из его теорем позже легла в основу так называемого метода Абеля–Пуассона обобщенного суммирования рядов.

Эйлером и Лежандром была построена теория эллиптических интегралов. Так называются интегралы вида $\int R(x,y)dx$, где $R(x,y)$ – рациональная функция от переменных x и y, которые связаны уравнением $y^2 = P(x)$, причем $P(x)$ – многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. Эйлер доказал теорему сложения эллиптических интегралов: сумму любого конечного числа эллиптических интегралов $\int_{x_0}^{x_1} R\left(x, y(x)\right)dx$ можно выразить в виде одного эллиптического

интеграла $\int_{x_0}^{X} R(x, y(x))\,dx$. В мемуаре Абеля, представленном в Парижскую АН и напечатанном в 1841 г., исследуются более общие интегралы, которые по предложению Якоби получили название абелевых. Это интегралы вида $\int R(x, y)dx$, где $R(x, y)$, – рациональная функция от переменных x, y, причем $y = y(x)$ – функция, заданная алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$. В случае, когда уравнение $F(x, y) = 0$ имеет вид $y^2 = P(x)$, где многочлен $P(x)$ имеет степень n, равную 5 или 6, интегралы $\int R(x, y)dx$ называются гиперэллиптическими (в настоящее время абелевы интегралы в случае $n \geq 5$ называют также ультраэллиптическими). В этом мемуаре Абель, в частности, получает свою теорему сложения абелевых интегралов, а именно: сумму произвольного конечного числа q абелевых интегралов $\int_{x_0}^{x_i} R(x, y(x))\,dx$, где $y = y(x)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $F(x, y) = 0$, имеющему вид $y^2 - P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен степени 5 или 6, можно представить в виде суммы вполне определенного числа $p < q$ абелевых интегралов $\int_{x_0}^{X_j} R(x, y(x))\,dx$ с прибавлением внеинтегральной суммы, состоящей из рациональной функции и логарифмов от рациональных функций, причем эти рациональные функции зависят от пределов интегрирования. При этом, как показал Абель, число p зависит только от вида алгебраической кривой, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$. Абель детально рассмотрел свою теорему сложения для случая гиперэллиптических интегралов и одного общего класса двучленных алгебраических

уравнений. Появившуюся впервые у Абеля характеристику p алгебраической кривой позже рассматривал Риман в своей «Теории абелевых функций» (1857), он же обозначил ее буквой p. Немецкий математик А. Клебш назвал ее родом алгебраической кривой и показал, что $p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r$, где n – порядок кривой $F(x,y)=0$, d – число двойных точек, r – число точек возврата. Он же положил начало систематическому использованию понятия рода кривой и абелевых интегралов в теории алгебраических кривых серией своих работ, начиная со статьи «О применении абелевых функций в геометрии» (1863–1864). В книге Клебша и Гордана «Теория абелевых функций» (1866) заложен новый фундамент теории абелевых интегралов на алгебраико-геометрической основе. Таким образом, теория абелевых интегралов, разработку которой начал Абель в своем мемуаре, затерявшемся на несколько лет в бумагах Коши, оказала большое влияние на становление алгебраической геометрии в ее разделе, относящемся к теории алгебраических кривых.

На развитие теории аналитических функций огромное влияние оказали разработка на протяжении XIX в. теории эллиптических функций и изучение задачи обращения ультраэллиптических интегралов. Теорию эллиптических функций начали разрабатывать: Гаусс, ничего не публиковавший по этому вопросу, и Абель, которому принадлежат первые публикации по этой теории, а также Якоби, вслед за Абелем подключившийся к ее разработке и сразу публиковавший свои результаты.

В первой части своих «Исследований об эллиптических функциях» (1827) Абель исходит от эллиптического интеграла первого рода в форме $\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{\left(1-c^2x^2\right)\left(1+e^2x^2\right)}}$, где c и e – постоянные. Гаусс

в неопубликованных записях рассматривал такой интеграл при $c=1$, а функцию $x=S(\alpha)$, обратную этому интегралу, т. е. эллиптическую функцию, называл «универсальнейшим лемнискатическим синусом» (при $c=e=1$ это лемнискатический синус $x=\mathrm{sl}\,\alpha$). Абель вместе с эллиптической функцией $x=\varphi(\alpha)$, обратной указанному выше интегралу, рассматривает еще две функции $f(\alpha)=\sqrt{1-c^2\varphi^2(\alpha)}$ и $F(\alpha)=\sqrt{1+e^2\varphi^2(\alpha)}$, которые тоже являются эллиптическими. Используя результаты Эйлера, Абель получает теоремы сложения, в которых $\varphi(\alpha+\beta)$, $f(\alpha+\beta)$, $F(\alpha+\beta)$ выражаются рационально через значения этих функций от α и β. Определив $\varphi(\beta i)$, а следовательно, и $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ для чисто мнимых значений аргумента, он с помощью теорем сложения распространяет определения всех трех функций на случай комплексного аргумента $\alpha+\beta i$. При этом обнаруживается, что функции φ, f, F – двоякопериодические (один период действительный, другой – мнимый), находятся нули и полюсы. Из теорем сложения Абель выводит формулы умножения аргумента, выражающие $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$ и $F(n\alpha)$ рационально через $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $F(\alpha)$. Задача деления аргумента на натуральное число n заключается в отыскании функции от α по заданным функциям от $n\alpha$. Абель выводит уравнения деления для $\varphi(n\alpha)$ при четных и нечетных n, показывает, что при $\varphi(n\alpha)=0$ эти уравнения удовлетворяют найденному им условию разрешимости уравнения в радикалах, и отсюда находит $\varphi(\alpha)$ через $\varphi(n\alpha)$. Выражая $\varphi(\alpha)$ через $\varphi\left(\dfrac{\alpha}{2n-1}\right)$ (аналогично и для f, F), он с помощью формального перехода к пределу при $n\to\infty$ получает представления функций $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $F(\alpha)$ в виде отношений целых функций, а затем представляет эти

целые функции в виде бесконечных произведений. Дальнейшее развитие теории преобразований эллиптических функций происходит в напряженном состязании Абеля и Якоби в 1828 г., когда Абелю оставалось менее года до смерти.

Меньшая по объему вторая часть «Исследований об эллиптических функциях» (1828) Абеля посвящена в основном двум вопросам: теории деления лемнискаты с помощью циркуля и линейки и преобразованиям эллиптических функций, а также эллиптических интегралов. Алгебраические выражения для координат точек деления лемнискаты на 2, 3 и 5 равных частей впервые нашел итальянский математик Фаньяно (1682–1766), положивший начало исследованию эллиптических интегралов. Гаусс в «Арифметических исследованиях» (1801) мимоходом отмечает о своей теории деления окружности, что она может быть применена «не только к круговым функциям, но и ко многим трансцендентным функциям, например, к тем, которые зависят от интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$». Абелю было известно, что через этот интеграл выражается длина лемнискаты. Уже в 1826 г. Абель с помощью эллиптических функций и своих результатов по теории уравнений установил, что деление лемнискаты на n равных частей осуществимо для тех же значений n, которые были установлены Гауссом для окружности.

Первой задачей, которая имеет отношение к интегральным уравнениям, была задача обращения преобразования Фурье, т. е. нахождение интеграла Фурье для заданной функции. То же касается и преобразования Лапласа. Теории этих преобразований составляют специальные разделы математики. Первой работой, относящейся непосредственно к интегральным уравнениям, считается работа Абеля, опубликованная в 1823 г., а затем в переработанном виде в 1826 году. Здесь он ставит и решает следующую механическую задачу. Требуется

найти такую кривую в вертикальной плоскости, чтобы материальная точка под действием силы тяжести скатывалась без начальной скорости по этой кривой из любой ее точки в наинизшую за время $t=\varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ – произвольная непрерывная функция от высоты ξ точки. Абель сводит эту задачу к интегральному уравнению вида $\int\limits_0^\xi \frac{u(x)dx}{\sqrt{\xi-x}}=\varphi(\xi)$ и решает его, а также уравнение $\int\limits_0^\xi \frac{u(x)dx}{(\xi-x)^\alpha}=\varphi(\xi)$, где $0<\alpha<1$. Теорию интегральных уравнений начали разрабатывать на рубеже XIX–XX вв. итальянский математик В. Вольтерра (1860–1940) и шведский математик Э. И. Фредгольм (1866–1927), а немецкий математик Д. Гильберт (1862–1943) в 1904 г. построил общую теорию линейных интегральных уравнений.

В части 2 пособия [234] уже говорилось о результатах Лагранжа в вопросе о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Важную роль в этих исследованиях играло рассмотрение группы подстановок корней уравнения. Итальянский математик и врач **Паоло Руффини (1765–1822)** в ряде своих работ 1798–1813 гг. доказал, хотя и не вполне строго, невозможность решения в радикалах алгебраических уравнений степени $n\geq 5$ общего вида, т. е. с произвольными (буквенными) коэффициентами. Он опирался на утверждение, что если корни уравнения можно выразить в радикалах, то все промежуточные радикалы, входящие в выражения для корней, можно представить в виде рациональных функций от корней исходного уравнения и некоторых корней из единицы. Несколько раз Руффини переделывал свое доказательство, но не смог строго доказать указанное выше утверждение. Независимо от Руффини Абель в работе, опубликованной в 1826 г. в журнале Крелле, дал полное доказательство невозможности решения в радикалах общих алгебраических уравнений степени $n\geq 5$. В § 2 своей работы Абель доказал утверждение, не поддававшееся Руффини.

Вторая часть доказательства Абеля в основном такая же, как и у Руффини. С доказательством Руффини–Абеля можно ознакомиться по монографии Н. Г. Чеботарева «Теория Галуа» (М.; Л.: ГТТИ, 1936, с. 41–43).

Указанные выше работы Руффини и Абеля относятся к уравнениям с произвольными коэффициентами и показывают, что не существует универсального выражения в радикалах, пригодного в качестве решения для всех уравнений данной степени $n \geq 5$. Но они не дают ответа на вопрос о разрешимости в радикалах уравнений с заданными числовыми коэффициентами или специальных классов уравнений. Лагранж доказал разрешимость в радикалах циклических уравнений. Гаусс нашел, в каких случаях корни уравнения деления окружность $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ можно выразить с помощью квадратных радикалов. Группа подстановок корней этого уравнения циклическая. Гаусс фактически рассмотрел ее подгруппы, они тоже являются циклическими группами. Важным вкладом в развитие теории решения уравнений и теории групп явилась работа Абеля «Мемуар об одном специальном классе алгебраически разрешимых уравнений» (1829). Здесь Абель уже имеет дело с областью рациональности – аналогом современного понятия поля. Название «область рациональности» связано с тем, что это множество получалось из заданных величин с помощью арифметических, или, как говорили раньше, рациональных действий: сложения, умножения (и им обратных). В этой работе Абель доказал разрешимость в радикалах важного специального класса алгебраических уравнений (абелевы уравнения). Это такие уравнения, что каждый корень уравнения рационально выражается через один: $x_i = \theta_i(x_1)$, причем функции θ_i обладают свойством $\theta_i\left[\theta_j(x)\right] = \theta_j\left[\theta_i(x)\right]$. По современной терминологии, это нормальные уравнения с абелевой группой

Галуа. Вообще, коммутативные группы называются абелевыми. Всякая конечная абелева группа является прямой суммой (а в мультипликативной записи – прямым произведением) циклических групп. Работы Лагранжа, Гаусса, Руффини и Абеля, в которых рассматриваются группы подстановок, были важным шагом на пути к созданию теории групп. Следующий этап в развитии теории групп и решения алгебраических уравнений в радикалах связан с именем Галуа.

Учитывая то высокое мастерство и легкость, которые Абель проявил в решении многих трудных вопросов математики, Ф. Клейн сравнивает Абеля в математике с Моцартом в музыке [140, с. 124–125]. Отметим еще аналогию с творческим мастерством выдающегося русского поэта М. Ю. Лермонтова, погибшего в неполные 27 лет на дуэли в 1841 году.

Об Абеле: [115; 140, с. 117–125; 107, с. 56–57; 108, с. 146–150; 136, с. 64–65; 70, с. 115–127; 214, с. 139–149].

Галуа

Гениальный французский математик **Эварист Галуа (1811–1832)** испытал поистине трагическую судьбу. Он родился в городке Бур-ля-Рен в 10 км от Парижа. Его отец заведовал пансионатом, а с 1813 г. исполнял обязанности мэра в своем городе. Начальное образование Эварист получил дома, а в 1823 г. поступил в лицей Луи-ле-Гран в Париже. Преподаватели лицея отмечают его незаурядные способности и то, что он одержим страстью к математике, но в то же время с нарочитой небрежностью относится к изучению других предметов. Галуа самостоятельно и легко одолевает «Начала геометрии» Лежандра и труды Лагранжа, думает, что доказал разрешимость алгебраических уравнений 5-й степени в радикалах, но вскоре находит у себя ошибку. Попытка поступить в 1828 г. в Политехническую школу не удалась. Галуа переходит в специальный математический класс

к талантливому преподавателю Ришару, который в своих заметках пишет: «Галуа работает лишь в высших областях математики». Публикуется работа Галуа о периодических непрерывных дробях.

В 1829 г. Галуа посылает в Академию наук на соискание премии свою работу о решении алгебраических уравнений в радикалах. Рецензентами были назначены Пуассон и Коши, но они не дали отзыва на эту работу. Этот год принес Галуа новые несчастья: его отец, отличавшийся либеральными воззрениями, не выдерживает нападок местного кюре и кончает жизнь самоубийством, а Эварист вторично «проваливается» на экзаменах в Политехническую школу. В этом же году он представляет свои дополненные исследования по теории решения уравнений в радикалах на соискание Большой математической премии Академии наук. Рукопись была вручена непременному секретарю Академии Фурье, который в 1830 г. умер, а среди его бумаг она не нашлась. В конце 1829 г. Галуа зачисляют в Приготовительную школу (так с 1822 г. до середины 1830 г. называлась Нормальная школа, готовившая преподавателей), ее уровень был очень низким по сравнению с Политехнической. В первой половине 1830 г. в «Бюллетене Ферюссака» выходят три статьи Галуа, посвященные решению алгебраических уравнений.

В июле 1830 г. во Франции произошла буржуазная революция. Монархию Бурбонов и феодально-абсолютистскую власть сменила монархия Луи-Филиппа и власть крупной буржуазии, продолжалось подавление республиканских настроений. Галуа был убежденным республиканцем, а преследовавшие его злоключения подогревали в нем ненависть к порядкам, царившим в сфере образования и науки. Он вступает в Общество друзей народа, выступает в газете с критикой поведения директора Нормальной школы в революционные июльские дни. В результате этого выступления Галуа исключают из Нормальной школы. Галуа записывается в Национальную гвардию, но ее вскоре распускают. Он занимается репетиторством по математике. В январе

1831 г. посылает в Академию наук свой мемуар об условиях разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Академики не поняли новых идей Галуа. Рецензия Лакруа и Пуассона была отрицательной: «Во всяком случае, мы сделали все от нас зависящее, чтобы понять доказательство г-на Галуа. Его рассуждения не обладают ни достаточной ясностью, ни достаточной полнотой для того, чтобы мы могли судить об их точности…» [116, с. 90–91].

В июне 1831 г. Галуа привлекается к суду за произнесенный на банкете вызывающий тост по адресу короля Луи-Филиппа. Суд оправдывает Галуа, принимая во внимание его юный возраст. Через месяц за участие в манифестации 14 июля 1831 года Галуа был арестован и провел 8 месяцев в тюрьме, он приобрел репутацию неистового республиканца. В возрасте 20-ти с половиной лет Галуа был из-за какой-то любовной истории вызван на дуэль и убит одним из своих прежних друзей. 29 мая 1832 года, в день накануне дуэли, Галуа написал несколько писем, в том числе письмо своему другу О. Шевалье о результатах своих исследований по теории решения алгебраический уравнений и по теории абелевых интегралов. Тогда же он просматривает и уточняет свой заново подготовленный для Академии наук «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах». Этот основной труд Галуа и неоконченный мемуар «Примитивные уравнения, которые решаются в радикалах» были изданы в 1846 г. французским математиком Ж. Лиувиллем (1809–1882), который первым попытался разобраться в теории Галуа и оценил ее значение. Не случайно академики оказались в затруднении при чтении работ школьника, а затем студента Галуа. Лиувилль в предисловии к изданию работ Галуа пишет: «Референтам показались неясными формулировки молодого математика… и следует признать, что упрек был не лишен оснований. Преувеличенное стремление к краткости породило этот недостаток… Тому, кто намерен вести читателя к неизведанной земле,

далеко от проторенной дороги, воистину необходима ясность. Как сказал Декарт: „Когда имеешь дело с трансцедентальными вопросами, будь трансцедентально ясен" . Слишком часто пренебрегал Галуа этой заповедью...» [117, с. 349]. Лиувилль объявил о своем намерении снабдить мемуар Галуа комментариями, но не осуществил его.

Первые связные изложения теории Галуа появились у французского математика Ж. А. Серре (1819–1885) и итальянского математика Э. Бетти (1823–1892) в 50-х гг. XIX века. Бетти доказал некоторые теоремы, приведенные Галуа без доказательства, и получил новые результаты. Но первым наиболее глубоко проник в теорию Галуа французский математик К. Жордан (1838–1922), систематически изложивший теорию Галуа со своими дополнениями в фундаментальном «Трактате о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870). В предисловии Жордан называет свой трактат комментариями к теории Галуа. Объем этого трактата (667 стр.) почти в 10 раз превышает объем всех математических работ Галуа.

Вопрос об условиях разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, по существу, равносилен выяснению условий, при которых исходное алгебраическое уравнение можно свести к цепочке вспомогательных уравнений все более низких степеней. До Галуа были установлены некоторые классы алгебраических уравнений, разрешимых в радикалах: уравнения порядка $n = 2,3,4$; циклические уравнения (Лагранж); двучленные уравнения вида $x^n - 1 = 0$ (Гаусс); нормальные уравнения с коммутативной группой (Абель). Большую роль в исследовании условий разрешимости уравнений играло рассмотрение групп подстановок корней уравнения. Изучив исследования своих предшественников, Галуа нашел общий критерий разрешимости алгебраических уравнений в радикалах в «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах», опубликованном в 1846 году. Здесь Галуа определяет понятие области рациональности (сам этот

термин появился позже). Этот аналог понятия поля встречается и у Абеля. У них это понятие связано с алгебраическим уравнением и означает совокупность коэффициентов уравнения вместе со всевозможными рациональными функциями от этих коэффициентов. Галуа использует расширения области рациональности, присоединяя к коэффициентам уравнения новые величины (например, корни n-й степени из единицы) и рассматривая совокупность коэффициентов уравнения и присоединенных величин вместе со всевозможными рациональными функциями от них.

Галуа вводит понятие группы и сам термин «группа», впервые этот термин появился в печати в его работе «Из теории чисел. Часть исследований по теории перестановок и алгебраических уравнений» (1830). Галуа часто использует термин «группа» в своем мемуаре, но не дает формального определения группы, т. к. имеет дело лишь с группами подстановок. Он полагает, что если подстановки S и T принадлежат группе, то ей принадлежит и подстановка ST. Свойства, определяющие группу, для подстановок выполняются автоматически. Коши в своих исследованиях группы подстановок называет ее неудобным термином «сопряженная система подстановок». Галуа иногда называет группами и совокупности, которые, вообще говоря, группами не являются, например смежные классы. С каждым алгебраическим уравнением он связывает такую группу подстановок его корней $x_1,\ldots,x_n$, которая не нарушает ни одного из всевозможных рациональных соотношений $\Phi_i(x_1,\ldots,x_n)=0$, $i=1,2,\ldots$, между корнями уравнения, хотя, в частности, может переводить одни соотношения в другие. (Так определяли группу G Галуа до создания немецким математиком Р. Дедекиндом (1831–1916) в 60-х гг. XIX в. теории числовых полей.) Галуа показывает, что если функция от корней уравнения не меняется (инвариантна) относительно подста-

новок его группы, то она принадлежит области рациональности данного уравнения и обратно.

Уже Лагранж разбивал группу подстановок на смежные классы по подгруппе. Заслугой Галуа является то, что он первым пришел к понятию нормальной подгруппы (нормального делителя, или инвариантной подгруппы), хотя и без введения этих терминов. Так называют подгруппу H группы G, если для любого элемента $g \in G$ имеет место равенство $gH = Hg$, или $gHg^{-1} = H$. У Галуа это такая подгруппа H группы G, которая производит, по его словам, «собственное» разложение группы G на классы. Это означает, что разложение группы G по подгруппе H на левые (gH) и правые (Hg) смежные классы совпадают. Множество всех смежных классов группы G по ее нормальной подгруппе H называют факторгруппой G по H и обозначают G/H.

С групповой точки зрения в теории Гаусса решения уравнения $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ в радикалах исходная циклическая группа корней уравнения содержит цепочку вложенных циклических подгрупп. Но любая подгруппа циклической группы является ее нормальной подгруппой. Этим вложенным подгруппам отвечает цепочка вспомогательных алгебраических уравнений более низких степеней вплоть до кубического или квадратного. Поэтому уравнение $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ всегда можно решить в радикалах, а в указанных Гауссом случаях – даже в квадратных радикалах. Галуа, будучи знаком с исследованиями Гаусса, понял, что и вообще для разрешимости алгебраического уравнения в радикалах необходимо и достаточно наличие у группы Галуа некоторых вложенных нормальных подгрупп. (Популярно говоря, группа

Галуа устроена наподобие «матрешки».) Но рассуждения Галуа были еще недостаточно четкими и полными.

Французский математик Камилл Жордан в упомянутом выше «Трактате о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870) систематически изложил теорию Галуа. Важную роль здесь и в дальнейшем сыграли введенные Жорданом понятия нормального ряда и разрешимой группы. Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп G такая, что $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$, где $\{e\}$ – единичная подгруппа, причем G_i – нормальная подгруппа в G_{i-1}, $i = 1,\ldots,m$. Факторгруппы G_{i-1}/G_i называются факторами нормального ряда. Группа G называется разрешимой, если у нее есть нормальный ряд, все факторы которого абелевы. Заметим, что все циклические группы являются абелевыми. В частности, циклические, а также конечные абелевы группы разрешимы. (В современной терминологии введенный выше нормальный ряд иногда называют субнормальным.)

Критерий Галуа теперь приобретает вид: алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима.

Группой Галуа общего (т. е. с буквенными коэффициентами) алгебраического уравнения степени n является симметрическая группа S_n – группа подстановок n элементов. Группы S_2, S_3, S_4 разрешимы. Группа S_n при $n \geq 5$ неразрешима, т. к. единственной ее нормальной подгруппой является знакопеременная группа A_n (т. е. группа подстановок n элементов с четным числом инверсий), которая не удовлетворяет условию разрешимости. Таким образом, из критерия Галуа следует теорема Руффини–Абеля. Галуа исследовал также вопрос о разрешимости в радикалах уравнений простой степени. В своем предсмертном письме Галуа приводит без доказательств и ряд полученных им новых результатов относительно абелевых интегралов.

В настоящее время используется определение группы Галуа, которое дал Р. Дедекинд во второй половине XIX в. в своей теории расширения полей. Пусть поле K является нормальным расширением поля k (т. е. получается из k, например, присоединением всех корней некоторого множества многочленов). По Дедекинду группой Галуа поля K над полем k называется группа всех тех автоморфизмов поля K, которая оставляет на месте все элементы поля k. Теория Галуа через несколько десятилетий после его смерти далеко вышла за рамки вопроса, связанного с решением алгебраических уравнений в радикалах. Основное значение теории Галуа заключается в том, что в связи с ней был создан аппарат теории групп и полей, который совершенно изменил первоначальное состояние алгебры. С современным изложением теории Галуа можно познакомиться, например, по книге М. М. Постникова «Основы теории Галуа» (М.: Физматгиз, 1960. – 124 с.).

В работе «Из теории чисел» (1830) Э. Галуа рассматривает сравнения n-й степени вида $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, где $f(x)$ – многочлен степени n с целыми коэффициентами, p – простое число. Такое сравнение равносильно сравнению степени не выше $p-1$, поэтому можно считать, что $n < p$. Сравнение n-й степени по простому модулю имеет не более n решений (в целых числах). Галуа выдвигает замечательную идею: в случае, когда сравнение n-й степени имеет менее чем n корней или вовсе их не имеет, считать недостающие корни сравнения «воображаемыми» числами. Он рассматривает выражения вида $\alpha_0 + \alpha_1 j + \ldots + \alpha_{n-1} j^{n-1}$ по модулю p, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Z}$, а j – новая мнимая единица, выполняющая для сравнения роль, сходную с ролью мнимой единицы i для алгебраических уравнений. В результате Галуа приходит к полю с числом p^n элементов, т. е. конечному полю (состоящему из конечного числа элементов). Понятие поля было введено Р. Дедекиндом почти через

40 лет после смерти Галуа. Было показано, что для любого натурального простого p и любого натурального n существует (с точностью до изоморфизма) только одно поле из p^n элементов. Оно называется полем Галуа и обозначается $\mathrm{GF}(p^n)$ (от слов Galois field) или $\mathbb{F}_{p^n}$ [9, с. 374; 51, с. 343–344]. При $n=1$ поле Галуа сводится к полю классов вычетов по простому модулю p.

Отметим, что еще раньше, чем Галуа, к идее «воображаемых» чисел для сравнений пришел Гаусс. В рукописи Гаусса, относящейся примерно к 1799 г., но опубликованной после его смерти, изложена идея введения таких «мнимых» для сравнений и получена часть результатов Галуа.

О Галуа: [116; 117; 107, с. 57–66; 140, с. 104–109; 214, с. 149–159; 9, с. 381–389; 70, с. 128–142; 51, с. 343–344]; статья П. Дюпюи «Жизнь Эвариста Галуа» (в сборнике: Галуа Э. Сочинения. – М.; Л.: ОНТИ, ГИТТЛ, 1936. – С. 257–334).

—— Якоби ——

Выдающийся немецкий математик **Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851)** еврейского происхождения родился в г. Потсдам в семье банкира. Не достигнув 16 лет, Якоби поступает в Берлинский университет. Он слушает лишь немногие лекции по математике, но зато с большим увлечением самостоятельно изучает труды Эйлера, а также активно занимается классической филологией. В 1825 г. заканчивает университет, защитив диссертацию о разложении рациональных дробей на простейшие дроби, и становится доцентом. В 1826 г. переселяется в Кёнигсберг, где до 1843 г. ведет активнейшую научную и педагогическую деятельность в университете сначала в качестве доцента, с 1827 г. – экстраординарного, а с 1829 г. – ординарного

профессора. Якоби был прекрасным педагогом и разносторонним математиком. Вслед за Абелем, соревнуясь с ним, Якоби разрабатывает основы теории эллиптических функций и публикует свои результаты в ряде статей, а затем подводит итог своим исследованиям в опубликованной в 1829 г. на латинском языке книге «Новые основания эллиптических функций», о которой речь будет ниже. В работах 1832 г. и 1835 г. Якоби публикует свои результаты по обращению гиперэллиптических интегралов. В 1837 г. выходит его работа, посвященная вариационному исчислению, в которой он приводит носящие его имя уравнение и условия слабого экстремума функционала. В теории определителей следующими после фундаментальной работы Коши 1815 г. являются исследования Якоби, опубликованные в 1834 г. и 1841–1843 годах. На протяжении 1842–1843 гг. Якоби читал курс лекций по механике, опубликованный только в 1866 г. Клебшем под названием «Лекции по динамике». Здесь Якоби приводит свою общую теорию интегрирования дифференциальных уравнений динамики и решает ряд задач механики и астрономии.

В 1843 г. Якоби в связи с ухудшением здоровья уезжает на полтора года в Италию, а затем получает в Берлине чисто академическую должность, но прежняя работоспособность к нему уже не возвращается. Добавляются заботы в связи с тем, что он разорился. Отличаясь своими радикальными взглядами, Якоби в 1848 г. становится членом оппозиционного конституционного клуба, где в одной из речей говорит, что его не пугает и перспектива установления республики. Революция 1848 г. закончилась победой реакции. Якоби припомнили о его поведении в дни революции, урезали оклад и сделали попытку, хотя и неудачную, перевести Якоби из Берлина обратно в Кёнигсберг. Якоби умер в 1851 г. от оспы.

Якоби был очень разносторонним математиком. Своей научной и педагогической активностью он оказал большое влияние на многих

математиков. Созданная им и Ф. Нейманом кёнигсбергская школа математической физики была первым подобного рода явлением в Германии. Французские математики Лиувилль и Эрмит, а также английский математик Кэли считали себя его учениками. Якоби поддерживал связь с русскими математиками М. В. Остроградским и Н. Д. Брашманом. Родной брат Якоби – выдающийся русский физик и электротехник Мориц Герман (Борис Семенович) Якоби (1801–1874), член Петербургской АН, с 1837 г. и до конца жизни работал в Петербурге.

В своих «Новых основаниях эллиптических функций» Якоби исходит от эллиптического интеграла первого рода в форме Лежандра $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$ $(0<k<1)$, где k – параметр, называемый модулем. Функцию, обратную этому интегралу, Якоби называет амплитудой и обозначает $\varphi = \operatorname{am} u$. Подстановка $x = \sin\psi$ переводит рассматриваемый интеграл в интеграл

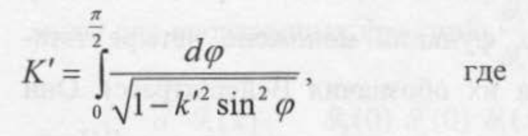
$$u = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где $\xi = \sin\varphi$. Таким образом, функция, обратная этому интегралу, имеет вид $\xi = \sin\operatorname{am} u$ (читается: синус амплитуды u). Вместе с ней Якоби определяет еще две функции:

$$\cos\operatorname{am} u = \sqrt{1-\sin^2\operatorname{am} u}, \quad \Delta\operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u}.$$

Эти три функции называют эллиптическими функциями Якоби. Немецкий математик Х. Гудерман (один из учителей Вейерштрасса) предложил в 1838 г. для этих функций Якоби простые обозначения $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ (или $\operatorname{sn}(u,k)$, $\operatorname{cn}(u,k)$, $\operatorname{dn}(u,k)$, если возникает необходимость указать модуль k). Как и Абель, Якоби доказывает для

этих функций теоремы сложения, с помощью которых распространяет свои функции на комплексную область и находит, что они являются двоякопериодическими. Принято обозначать $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$,

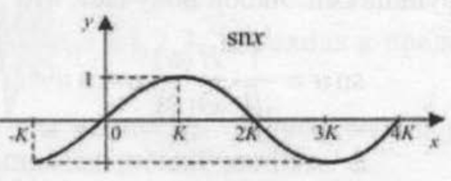


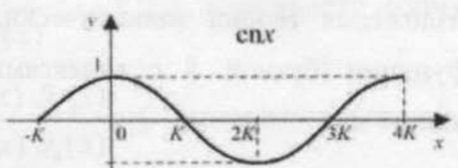
$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$, где $k'=\sqrt{1-k^2}$ называется дополнительным модулем. Тогда из теорем сложения для эллиптических функций получаются формулы

$\mathrm{sn}(K+x)=\mathrm{sn}(K-x)$,

$\mathrm{cn}(K+x)=-\mathrm{cn}(K-x)$,

$\mathrm{dn}(K+x)=\mathrm{dn}(K-x)$,





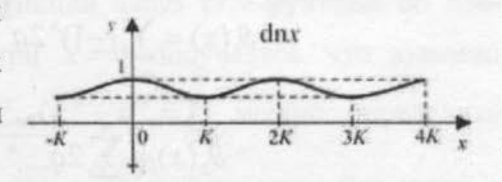


Рис.7

$\mathrm{sn}(x+2K)=-\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}(x+2K)=-\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}(x+2K)=\mathrm{dn}\,x$, играющие роль, аналогичную формулам приведения в тригонометрии. Отсюда получается, что функции $\mathrm{sn}\,x$ и $\mathrm{cn}\,x$ имеют минимальный период $4K$, а $\mathrm{dn}\,x$ – период $2K$. При переходе в комплексную область получаются еще и комплексные периоды для функций $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$ и $\mathrm{dn}\,x$ соответственно $2iK'$, $2K+2iK'$, $4iK'$. В действительной области функции $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ при $0<k<1$ имеют графики, указанные на рис. 7. При $k=0$ функции $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ переводятся соответственно в $\sin x$, $\cos x$, 1. Далее в «Новых основаниях...» Якоби рассматривает вопрос об умножении и делении аргумента эллиптических функций и др. При этом в качестве вспомогательных функций он использует так называемые тэта-функции $\Theta(u)$ и $H(u)$, совпадающие при $u=2Kx$ с введенными им позже функциями $\vartheta_4(x)$ и $\vartheta_1(x)$.

Они представляют собой всюду сходящиеся в комплексной плоскости тригонометрические ряды и, следовательно, являются целыми функциями. Якоби получает, что

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H(u+K)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

В лекциях Якоби, изданных уже после его смерти, в основу изложения теории эллиптических функций положено четыре тэта-функции (буквой ϑ с индексами их обозначил Вейерштрасс). Они имеют вид

$$\vartheta_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin(2n+1)\pi x;$$

$$\vartheta_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)\pi x;$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2q^{n^2} \cos 2n\pi x;$$

$$\vartheta_4(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2n\pi x$$

(здесь $q = e^{\pi i \tau}$, где $\operatorname{Im}\tau > 0$, поэтому $|q| < 1$). Эти функции могут быть выражены одна через другую, например: $\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(x)$, $\vartheta_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(x)$, $\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_4(x)$, $\vartheta_4\left(x + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(x) = q^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x i} \vartheta_2\left(x + \frac{i\tau}{2}\right)$ и т. п. Якоби выводит десятки тождеств, нередко очень сложных, связывающих тэта-функции, в частности

$$\text{I)} \quad \vartheta_3^2(0)\vartheta_3^2(x) = \vartheta_4^2(0)\vartheta_4^2(x) + \vartheta_2^2(0)\vartheta_2^2(x);$$

$$\text{II)}\quad \vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(x) = \vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(x) + \vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(x);$$

$$\text{III)}\quad \vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(x) = \vartheta_2^2(0)\vartheta_1^2(x) + \vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(x);$$

и теоремы сложения для функций $\dfrac{\vartheta_i(x)}{\vartheta_4(x)}$, $i = 1,2,3$. Переходя к пределу в тождествах, выражающих теоремы сложения, он получает формулы для производных функций $\dfrac{\vartheta_i(x)}{\vartheta_4(x)}$, $i = 1,2,3$, в частности формулу IV) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)} = -\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_4(0)}\dfrac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}$. С помощью таких тождеств он строит эллиптические функции через тэта-функции по следующей схеме. Из тождества I при $x = 0$ получается, что взаимно дополнительные модули k и k' $(k^2 + k'^2 = 1)$ можно определить с помощью равенств $\sqrt{k} = \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}$, $\sqrt{k'} = \dfrac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}$. Тождество II позволяет ввести вспомогательную переменную φ так, что $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}$, при этом $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Разделив тождество III на $\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(x)$ и используя указанные выше выражения для $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ и $\sin\varphi$, находим, что $\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$. Это вместе с равенством $\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)} = \dfrac{k}{\sqrt{k'}}\sin\varphi\cos\varphi$ позволяет записать тождество IV в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right) = -Ak\sin\varphi\cos\varphi\frac{dx}{d\varphi}, \text{ где } A = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Выполним дифференцирование в левой части и, после элементарного упрощения, проинтегрируем уравнение с учетом того, что можно взять $\varphi = 0$ при $x = 0$. Получим $\dfrac{A}{k}x = \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Здесь при $x = \dfrac{1}{2}$ можно взять вспомогательный угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ в силу того, что из $\vartheta_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\vartheta_4\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0$ следует $\cos\varphi = 0$.

Тогда $\dfrac{A}{k}\cdot\dfrac{1}{2} = K$, следовательно, $2Kx = \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, поэтому $\varphi = \operatorname{am}(2Kx)$, $\sin\varphi = \sin\operatorname{am}(2Kx) = \operatorname{sn}(2Kx) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}$. Таким образом, эллиптические функции Якоби приобретают вид

$$\operatorname{sn}x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)},\ \operatorname{cn}x = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)},$$

$$\operatorname{dn}x = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)}.$$

Кроме того, Якоби находит, что $2K = \pi\vartheta_3^2(0)$, поэтому функции $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$ можно записать с помощью одних только тэта-функций без использования каких-либо величин, связанных с эллиптическими интегралами.

Если, следуя Глейшеру, обозначить $s = \operatorname{sn}x$, $c = \operatorname{cn}x$, $d = \operatorname{dn}x$, то основные соотношения между функциями Якоби можно кратко записать в виде $s^2 + c^2 = 1$, $k^2s^2 + d^2 = 1$, а производные функций Якоби – в виде $s' = cd$, $c' = -sd$, $d' = -k^2sc$.

Для первоначального знакомства с эллиптическими функциями рекомендуем книгу А. И. Маркушевича «Замечательные синусы (Введение в теорию эллиптических функций)» (М.: Наука, 1965. – 91 с.). История возникновения и развития теории эллиптических функций приведена в книге [108, с. 146–164].

Якоби принадлежат и важные достижения в алгебре. Он дал метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов, который носит его имя. При этом квадратичная форма приобретает вид $A(x,x)=\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2+...+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2$ (формула Якоби) в предположении, что все угловые миноры Δ_i определителя квадратичной формы отличны от нуля. Отсюда вытекает теорема Якоби о сигнатуре квадратичной формы и критерий положительной определенности квадратичной формы, указанный английским математиком Дж. Сильвестром (1814–1897). В работе 1834 г. Якоби доказал теорему о том, что две квадратичные формы можно привести одновременно к сумме квадратов, если хотя бы одна из них положительно определенная. Здесь же выводит условия на коэффициенты линейного преобразования, сохраняющего квадратичную форму $x_1^2+\ldots+x_n^2$, т. е. условия ортогональности преобразования. Закон инерции квадратичных форм излагал Гаусс в своих лекциях в 1846–1847 гг., слушателем которых был Б. Риман. Независимо от него закон инерции квадратичных форм нашел и опубликовал в 1850 г. Якоби, а Сильвестр предложил этот термин и опубликовал формулировку без доказательства в 1852 году. Ряд работ Якоби посвятил систематическому построению теории определителей, в том числе завершающую работу «О построении и свойствах определителей» (1840). В связи с вопросом о замене переменных в n-кратном интеграле Якоби в работе «О функциональных определителях» (1841) вводит функциональный определитель – якобиан, элементами которого являются частные производные функции n пере-

менных. Имя Якоби носит специальный класс ортогональных многочленов.

Ирландский математик У. Р. Гамильтон (1805–1865) придал дифференциальным уравнениям динамики вид системы, носящей его имя, или (по предложению Якоби) канонической:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где $H(t,q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ – функция Гамильтона, q_i – обобщенные координаты, p_i – обобщенные импульсы ($p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, где L – функция Лагранжа). Якоби поставил и дал первое решение задачи об определении всех канонических преобразований переменных q_i, p_i, т. е. таких преобразований, которые переводят каноническую систему (систему Гамильтона) снова в каноническую. Якоби предложил также два метода интегрирования системы уравнений Гамильтона, из них первый аналогичен тому, который предложил Коши для общего уравнения первого порядка с частными производными $F\left(x_1,\dots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$ (см. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 412–420).

О Якоби: [108, с. 150–157, 168–173; 140, с. 125–132; 109, с. 194–202; 69; 107, с. 67–68; 74, гл. 16].

—— Становление проективной геометрии ——

XIX век является веком расцвета проективной геометрии, тогда ею занималось большинство геометров. Некоторые ее элементы имеют давнее происхождение. Созданию проективной геометрии как науки предшествовали результаты о проективных свойствах фигур, полученные в III в. до н. э. Аполлонием, в III в. – Паппом, в XVII в. – Дезаргом

и Паскалем, в конце XVIII в. и начале XIX в. – Монжем и Л. Карно. Очередному возрождению проективной геометрии и становлению ее как науки положил начало французский математик и инженер **Жан Виктор Понселе (1788–1867)**. Он родился в г. Мец, окончил Политехническую школу в Париже и Инженерную школу в Меце. Как и Л. Карно, он был учеником Монжа. В начале 1812 г. Понселе был призван в армию Наполеона, участвовал в походе на Россию и в ноябре 1812 г. попал в плен. Два года в качестве военнопленного он провел в деревне под Саратовом и вынужденный досуг использовал для разработки основных понятий и фактов проективной геометрии, которые излагал своим товарищам по плену – выпускникам Политехнической школы. В 1815 г. Понселе возвращается во Францию в г. Мец. В 1817–1818 гг. публикует ряд работ, в 1820 г. представляет в Парижскую академию мемуар «О проективных свойствах конических сечений». Коши опубликовал о нем свой отзыв. В 1822 г. Понселе издает свой основной труд «Трактат о проективных свойствах фигур». В 1825–1835 гг. работает в качестве профессора Прикладной школы в Меце, в 1826 г. издает свой «Курс механики». В 1835 г. переехал в Париж, занимал высокие военные посты, дослужившись до генерала. Вместе с тем в 1838–1848 гг. был профессором механики в Сорбонне, а затем начальником Политехнической школы.

«Трактат о проективных свойствах фигур» Понселе произвел очень большое впечатление на математиков. В нем он исходит из рассмотрения центрального проектирования плоской фигуры на другие плоскости, т. е. проектирования с помощью лучей, исходящих из данной точки. Рассматривает он и некоторые другие виды проектирования [9, с. 196]. Проективными свойствами он называет свойства фигур, сохраняющиеся при проектировании. Предметом проективной геометрии он считает изучение проективных свойств фигур. Понселе первым стал рассматривать проективную геометрию как самостоятельную

область геометрии. У Монжа синтетическая (т. е. опирающаяся на геометрические фигуры, а не уравнения) и аналитическая точки зрения в геометрии дополняют друг друга. Начиная с Понселе, эти точки зрения на построение геометрии расходятся. Понселе в своем «Трактате» является решительным сторонником синтетических методов.

Понселе отмечает, что проектирование не меняет, например, взаимного пересечения линий, их касания, но изменяет расстояния, углы и т. п. Таким образом, он различает проективные и метрические свойства фигур, указывая, что метрические свойства, вообще говоря, не сохраняются при проектировании. Некоторые точки или прямые при проектировании могут перейти в бесконечность, поэтому уже Дезарг в XVII в. ввел несобственные элементы: бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленные прямые, их вводит и Понселе. Каждая прямая дополняется одной (бесконечно удаленной) несобственной точкой, каждая плоскость – одной несобственной прямой, все пространство – одной несобственной плоскостью. Пара параллельных прямых дополняется одной и той же несобственной точкой, а непараллельные – разными. Пара параллельных плоскостей дополняется одной и той же несобственной прямой, а непараллельных – разными. Евклидово пространство, дополненное несобственными (бесконечно удаленными) элементами, становится проективным пространством. Таким образом, например, проективная плоскость сильно отличается от евклидовой плоскости. С топологической точки зрения проективная плоскость представляет собой одностороннюю (не ориентируемую) замкнутую поверхность, но это стало ясным в последней четверти XIX в., когда были созданы основы топологии. Дополнение евклидова пространства до проективного приводит к тому, что при проектировании всегда есть образ и прообраз проекции.

Важным элементом проективной геометрии является соответствие между полюсами и полярами относительно конического сечения. Точке

P (полюсу) ставится в соответствие прямая – поляра точки *P* относительно конического сечения – и обратно. Понселе устанавливает полярное соответствие, взяв вместо конического сечения произвольную плоскую кривую.

Французский астроном и математик Ж. Д. Жергонн (1771–1859) высказал открытый до него Понселе общий принцип соответствия между точками и прямыми, который назвал «принципом двойственности»: утверждения, касающиеся точек, прямых и отношения принадлежности (инцидентности) остаются верными, если слово «точка» заменить словом «прямая» и обратно. Жергонн дал нечеткую формулировку этого принципа. Она была уточнена в дискуссии ряда геометров после ее критики Понселе. Примером двойственных утверждений являются:

Двум различным точкам инцидентна прямая (и притом только одна).	Двум различным прямым инцидентна точка (и притом только одна).

В качестве более сложного примера двойственных утверждений приведем теорему Паскаля, установленную в 1639 г., и двойственную ей, найденную в 1806 г. учеником Монжа Брианшоном:

Теорема Паскаля	Теорема Брианшона
Три точки пересечения противоположных сторон 6-угольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой.	Три прямые, соединяющие противоположные вершины 6-угольника, описанного вокруг конического сечения, пересекаются в одной точке.

Понселе в своем трактате вводит не только бесконечно удаленные точки и прямые, но и мнимые геометрические элементы: несобственные мнимые точки, мнимые прямые, мнимую окружность.

Так, любая окружность на плоскости пересекается с бесконечно удаленной прямой в двух (одних и тех же для всех окружностей на плоскости) мнимых точках, называемых циклическими точками. Две окружности на плоскости, помимо двух общих циклических точек, могут иметь еще и две действительные точки пересечения. Вообще, два конических сечения могут пересечься не более чем в четырех точках, некоторые из этих точек, или даже все, могут оказаться мнимыми. Все сферы в пространстве пересекаются с бесконечно удаленной плоскостью по некоторой (одной и той же для всех сфер) мнимой кривой. Использование несобственных элементов (бесконечных или мнимых) позволило Понселе придать общность утверждениям в проективной геометрии. В оправдание введения этих объектов он ссылается на свой «принцип непрерывности», согласно которому свойства геометрических фигур сохраняются при непрерывных изменениях фигур (за некоторыми исключениями). Понселе не дает какого-либо обоснования этому принципу, считая его очевидным, вопреки мнению Коши. Не дает Понселе и определения несобственной мнимой точки. В последние годы жизни Понселе очень сожалел, что большие административные обязанности не позволили ему развивать свои идеи в проективной геометрии, которые он изложил в своем «Трактате». С Жергонном он вел спор относительно своего приоритета в установлении принципа двойственности. О Понселе: [248; 108, с. 34–36; 9, с. 194–201; 140, с. 96–98].

После Понселе с конца 1820-х гг. на протяжении почти полувека проблемы проективной геометрии были в центре внимания ряда немецких геометров – Я. Штейнера (1796–1863), Х. фон Штаудта (1798–1867), А. Ф. Мёбиуса (1790–1868), Ю. Плюккера (1801–1868) (группировавшихся вокруг журнала Крелле) и др., французского математика М. Шаля (1793–1880). Штейнер и Штаудт – представители синтетического направления в проективной геометрии, а Мёбиус и

Плюккер – аналитического. Среди немецких геометров происходили резкие споры: некоторые из «синтетиков», особенно Штейнер, выступали против «аналитиков». Шаль использовал синтетические и аналитические методы. Дальнейшее развитие математики показало преимущество аналитических методов в проективной геометрии.

Сначала кратко рассмотрим основные достижения в проективной геометрии четырех указанных выше немецких геометров. Их деятельность частично выходит за рамки рассматриваемого нами периода, т. к. они (как и Понселе) умерли в 60-х гг. XIX века.

Август Фердинанд Мёбиус (1790–1868), немецкий математик и астроном, родился в Шульпфорте недалеко от Лейпцига в семье учителя танцев. Учился в Лейпцигском университете (1809–1813), а в 1813–1814 гг. учился астрономии у Гаусса в Гёттингенском университете. С 1816 г. работал в астрономической обсерватории в пригороде Лейпцига (с 1818 г. – ее директор), а затем одновременно и профессором Лейпцигского университета. Не принимал участия в частых в то время научных спорах о геометрии.

Будучи сторонником аналитического направления в проективной геометрии, он в книге «Барицентрическое исчисление» (1827) первым ввел, хотя еще и не в общем виде, однородные проективные координаты, т. е. такие, для которых имеет значение только их отношение. Мёбиус называет их барицентрическими, потому что определяемая ими точка P на плоскости представляется в виде центра тяжести («барицентра») фиксированного треугольника $A_1A_2A_3$, в вершины которого нужно поместить соответствующие массы m_1, m_2, m_3. При этом точка P имеет координаты (m_1, m_2, m_3) или вообще $(\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3)$, где число $\lambda \neq 0$ представляет собой множитель пропорциональности. Меняя массы, получаем точки, лежащие внутри треугольника, а если какая-либо из масс равна нулю – точку на стороне треугольника.

С помощью тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ Мёбиус вводит и однородные координаты в пространстве. Мёбиус приводит в своей книге много своих идей и результатов, относящихся к проективной геометрии.

Мёбиус первым последовательно использовал в геометрии «принцип знаков», применяя его не только для отношений отрезков (например, в трактовке двойного отношения четырех точек на прямой), но и «направление обхода» границ фигур при вычислении площадей.

Большое место в «Барицентрическом исчислении» Мёбиус уделяет различного рода геометрическим преобразованиям, т. е. взаимно однозначным соответствиям между двумя плоскими фигурами или областями пространства. Мёбиус называет геометрические преобразования «сродствами» и записывает их в своих однородных координатах. В частности, он обстоятельно изучает «аффинное сродство», т. е. аффинное преобразование. На евклидовой плоскости (она не содержит бесконечно удаленной прямой) в декартовых координатах такое преобразование задается в виде

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 , \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 ; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 .$$

Аффинное преобразование переводит параллельные прямые в параллельные, а пересекающиеся – в пересекающиеся. Углы и длина отрезка при этом, вообще говоря, не сохраняются, но сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок. Поэтому так называемое простое отношение трех точек A, B, C, лежащих на одной прямой, т. е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, является инвариантом аффинного преобразования.

Проективное преобразование, т. е. наиболее общее преобразование плоскости, при котором точки, лежащие на одной прямой (коллинеарные точки) переходят в точки, обладающие тем же свойством, Мёбиус называет «коллинеарным сродством», или «коллинеацией». На

евклидовой плоскости в декартовых координатах проективное преобразование имеет вид дробно-линейного преобразования

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}\ ; \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}\ ; \quad \det(a_{ik}) \neq 0\ ;$$

$i,k = 1,2,3$.

Проективное преобразование переводит прямые в прямые, но длина отрезков, углы, параллельность прямых и простое отношение точек на прямой при этом, вообще говоря, не сохраняется, а сохраняется двойное отношение четырех точек A, B, C, D на прямой. Это собственные точки, они образуют две пары: (A,B) и (C,D), а двойное отношение имеет вид $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$, его кратко обозначают $(ABCD)$ (см. рис. 30 на с. 255 части 2 нашего пособия [234]). Мёбиус считает это число положительным, если точки на прямой расположены в порядке следования A, B, C, D, т. е. если пара (C,D) не разделяет пару (A,B), а в противном случае – отрицательным. Благодаря правилу знаков, Мёбиус четко установил свойства двойного отношения и его инвариантность при проективных преобразованиях. Без учета правила знаков факт этой инвариантности при центральном проектировании знал уже древнегреческий математик Папп в III в., а в начале XIX в. доказал Л. Карно. Мёбиус рассматривает и другие виды «сродства», например, зеркальную симметрию и подобие фигур.

Мёбиус не располагал понятием группы. Эквивалентом этого понятия у него является понятие «сродства», характеризующее различные виды геометрических преобразований. Поэтому Мёбиус является предшественником «эрлангенской программы» 1872 г. немецкого математика **Феликса Клейна (1849–1925)**, в которой был дан групповой подход к описанию различных геометрий (евклидовой, аффинной, проективной) на основе соответствующих групп преобразований и инвариантов этих групп.

Мёбиусу принадлежат многие работы по геометрии, а также очень хороший двухтомный «Учебник статики» (1837), в котором он тоже использует свои идеи о геометрических преобразованиях.

Одностороннюю поверхность, называемую «листом Мёбиуса», ввел в 1858 г. Мёбиус и в том же году независимо от него немецкий математик И. Б. Листинг (1808–1882), занимавшийся топологией. Листинг сообщил об этой поверхности в публикации 1862 г. Мёбиус послал свою работу, в которой говорилось и о свойствах этой поверхности, в Парижскую АН, она там лежала в бумагах, а в 1865 г. Мёбиус опубликовал ее сам. Лист Мёбиуса наглядно получается из прямоугольной ленты, если один из ее концов повернуть на 180° и приклеить ко второму концу. Эта поверхность имеет только одну сторону – ее можно всю окрасить, не переходя через ее край. Исторически это был первый пример односторонней поверхности. В западной литературе лист Мёбиуса называют более естественно: «лента Мёбиуса».

Для тех, кто не знаком с этой поверхностью, заметим, что она не столь простая, как кажется на первый взгляд. В этом нетрудно убедиться: можно взять, например, четыре одинаковые прямоугольные полоски бумаги, разграфить их вдоль линиями, соответственно, на 2, 3, 4, 5 равных частей, превратить каждую полоску в лист Мёбиуса и разрезать по указанным линиям и их продолжениям. Получаются довольно интересные результаты, зависящие от четности или нечетности числа разрезов.

Мёбиус получил важные результаты и в теории чисел, введя так называемую «функцию Мёбиуса» $\mu(n)$. Именем Мёбиуса назван кратер на обратной стороне Луны.

Юлиус Плюккер (1801–1868), немецкий математик и физик-экспериментатор, родился в Эльберфельде. Учился в университетах в

Бонне и в Париже. В Боннском университете получил докторскую степень и работал там в 1828–1831 гг., а в 1832–1834 гг. – в Берлинском университете, откуда ушел, подвергаясь нападкам представителей синтетического направления в проективной геометрии, группировавшихся вокруг Я. Штейнера. С 1836 г. и до своей смерти Плюккер был ординарным профессором Боннского университета одновременно по двум кафедрам – математики и физики. Плюккер является представителем аналитического направления в проективной геометрии. Свой метод, который он называет «аналитико-геометрическим», Плюккер вырабатывает в пяти больших трудах, опубликованных в 1828–1846 и 1869 годах. Сюда же входит и его труд «Теория алгебраических кривых» (1839), относящийся к алгебраической геометрии. С 1846 г. Плюккер занимался, в основном, экспериментальной физикой (электро-магнетизм, спектры электрических разрядов и др.). Член Парижской АН с 1867 г.

Большой заслугой Плюккера в проективной геометрии является то, что он ввел общие однородные проективные координаты точек. Для введения однородных координат (x_1, x_2, x_3) точки плоскости Плюккер использует базисный треугольник $A_1A_2A_3$ на плоскости, но, в отличие от Мёбиуса, не связывает координаты точек с центром тяжести треугольника. Однородные координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) точки в пространстве он вводит с помощью базисного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Однородные координаты точек определены неоднозначно. На плоскости ту же точку (x_1, x_2, x_3) дает и тройка чисел $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ с произвольным множителем $\lambda \neq 0$. Декартовы координаты (x, y) собственных точек плоскости связаны с однородными координатами (x_1, x_2, x_3) следующим образом: $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, где $x_3 \neq 0$.

С помощью однородных координат Плюккер аналитически описал несобственные элементы в проективной геометрии. Точки плоскости, для которых $x_3 = 0$, он по определению считает принадлежащими бесконечно удаленной прямой. Кратко уравнение бесконечно удаленной прямой записывается в виде $x_3 = 0$.

В проективной геометрии в качестве несобственных элементов, кроме бесконечно удаленных точек, прямых и плоскостей, рассматриваются также мнимые элементы, которые в аналитической геометрии не учитываются. Например, очевидно, что окружности $(x-20)^2 + y^2 = 16^2$ и $(x+15)^2 + y^2 = 9^2$ не имеют действительных точек пересечения. Но нетрудно убедиться, что система этих двух уравнений имеет два мнимых решения: $(0,12i)$ и $(0,-12i)$, они лежат на прямой $x = 0$. В проективной геометрии такие точки полезно учитывать для общности формулировок некоторых теорем, например о числе точек пересечения конических сечений.

Кроме аналитической трактовки бесконечно удаленных элементов, Плюккер дает ее и для мнимых элементов, которые Понселе рассматривал чисто геометрически (синтетически), не используя формул.

Уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ в однородных координатах имеет вид $(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = R^2 x_3^2$. Пересечение окружности с бесконечно удаленной прямой $x_3 = 0$ определяется уравнениями $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = 0$, откуда $x_2 = \pm i x_1$. Следовательно, любая окружность пересекается с бесконечно удаленной прямой в одних и тех же двух мнимых точках $(1,i,0)$ и $(1,-i,0)$, которые называются циклическими точками. Любую собственную точку (x,y,z) в пространстве можно задать ее однородными координатами

(x_1, x_2, x_3, x_4) по формулам $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ где $x_4 \neq 0$. Бесконечно удаленная плоскость задается совокупностью точек $(x_1, x_2, x_3, 0)$, ее уравнение $x_4 = 0$. Легко получается, что все сферы в пространстве имеют общую мнимую линию пересечения, задаваемую уравнениями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$, она называется (мнимой) окружностью сфер, или сферической окружностью.

Уравнение прямой $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$ в однородных координатах имеет вид $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, симметричный относительно коэффициентов u_i и переменных x_i. Тройку чисел (u_1, u_2, u_3) Плюккер назвал тангенциальными координатами прямой. Уравнение $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ можно рассматривать как условие того, что переменная точка (x_1, x_2, x_3) лежит на фиксированной прямой (u_1, u_2, u_3), а также как условие того, что переменная прямая (u_1, u_2, u_3) проходит через фиксированную точку (x_1, x_2, x_3). Таким образом, из симметрии уравнения прямой в однородных координатах Плюккер получил обоснование принципа двойственности Понселе–Жергонна. Он распространил этот принцип и на случай пространства.

В однородных координатах Плюккера, используемых и в настоящее время, общее проективное преобразование плоскости имеет вид

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3;$$

$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3;$$

$$x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3,$$

где $\det(a_{ik}) \neq 0$; $i, k = 1, 2, 3$. При $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$ получаем аффинное преобразование плоскости, оно переводит бесконечно удаленную

прямую в себя. Для собственных точек отсюда получаются и формулы преобразований плоскости в декартовых координатах, указанные выше.

Якоб Штейнер (1796–1863) – немецкий геометр, яркий представитель синтетического направления в проективной геометрии в первой половине XIX века. Он родился в Утцендорфе (Швейцария) в бедной крестьянской семье. До 19-летнего возраста не посещал школу, едва умел писать, но самостоятельно приобрел некоторые математические знания. Его отец, хотя и неохотно, согласился на поступление Якоба в школу известного швейцарского педагога И. Г. Песталоцци (1746–1827). Под влиянием своего учителя, считавшего геометрию очень полезной для развития умственных способностей учащихся, Штейнер увлекся геометрией. Некоторое время работал в школе Песталоцци. В 1818–1821 гг. учился в Гейдельбергском университете в Германии, самостоятельно изучая труды французских геометров, а на жизнь зарабатывал частными уроками. Не окончив университет, переезжает в Берлин и работает там до 1827 г. учителем в гимназии, а затем до 1935 г. преподает в Берлинском промышленном училище (техникуме). С 1826 г., когда был основан журнал Крелле, печатает в нем свои статьи. В 1834 г. Штейнера избрали членом Берлинской АН. С 1835 г. и до своей смерти работает экстраординарным профессором Берлинского университета. (Экстраординарный профессор, в отличие от ординарного, не заведовал кафедрой.)

Якоб Штейнер занимался только геометрией. Он был прекрасным педагогом, его лекции в Берлинском университете пользовались большим успехом у студентов. Он очень ясно излагал предмет и не пользовался даже рисунками, считая, что геометрические образы нужно ясно представлять себе в уме. Он был решительным сторонником синтетического направления в проективной геометрии, не приз-

навая законности использования в ней аналитических (алгебраических) методов. Это ограничивало его возможности в проективной геометрии, а его непримиримость к «аналитикам» приводила к резким спорам с ними.

Основные статьи Штейнера были написаны до его работы в Берлинском университете. Главным его сочинением является «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (1832). Штейнер строит проективную геометрию, переходя от простых геометрических образов к более сложным. Образы первой ступени: прямолинейный ряд точек, пучок прямых, пучок плоскостей. Вторая ступень: точки и прямые одной плоскости, связка прямых и плоскостей. Третья ступень: точки, прямые и плоскости в пространстве. Далее устанавливаются проективные свойства образов первой ступени, а затем и высших. Проективность образов первой ступени характеризуется сохранением двойного отношения четырех точек прямой. Широко используется принцип двойственности и перспектива. С помощью двух проективных пучков прямых на плоскости, т. е. образов первого порядка, Штейнер строит кривые второго порядка как множества точек пересечения соответствующих лучей. Некоторые поверхности второго порядка (например, однополостный гиперболоид) порождаются двумя проективными пучками плоскостей. Однако возможности схемы проективной геометрии Штейнера были ограниченными, т. к. не использовались «правило знаков» и мнимые элементы.

В связи с проективной геометрией Штейнер много внимания уделял и элементарной геометрии, особенно задачам на построение с помощью одной линейки, а также с помощью линейки и неподвижной окружности на плоскости. Им посвящена книга Штейнера «Геометрические построения, выполненные с помощью прямой линии и неподвижного круга» (1833) (имеется и русский перевод 1939 года).

Упомянем еще мастерски изложенную работу Штейнера «О максимумах и минимумах фигур и о сфере» (1842). Здесь методами элементарной геометрии решается много изопериметрических задач. Важнейшим здесь является доказательство того, что плоской фигурой, которая при наименьшем периметре имеет наибольшую площадь, является круг. Единственным недостатком здесь было то, что не доказывалось существование указанных экстремальных значений (вернее, точных граней) длины и площади. Это уточнили К. Вейерштрасс и Г. А. Шварц.

Христиан фон Штаудт (1798–1867), немецкий геометр, родился в Ротенбурге (недалеко от Бремена) в знатной семье. Как и Мёбиус, он некоторое время был студентом у Гаусса. В 1822–1827 гг. работал в университете и гимназии в г. Вюрцбург, а в 1827–1835 гг. – в политехникуме и гимназии в Нюрнберге. С 1835 г. и до конца жизни – профессор математики Эрлангенского университета.

Штаудт был представителем синтетического направления в проективной геометрии, в разработку которой включился, будучи в Эрлангене. Все современники Штаудта, занимавшиеся проективной геометрией, использовали важнейший ее инвариант – двойное отношение четырех точек на прямой, – рассматривая отношения длин соответствующих отрезков. Штаудту в его книге «Геометрия положения» (1847) удалось построить проективную геометрию, свободную от каких бы то ни было метрических понятий. Название этой книги указывает на ее преемственность с одноименной книгой французского математика Л. Карно (1803 г.), о которой мы говорили в части 2 пособия [234, с. 254–256]. За недостатком места мы лишь очень кратко скажем об основной идее Штаудта введения им проективной шкалы координат на прямой, подробнее см. [108, с. 46–47] или [140, с. 152–156; 9, с. 205–206].

Чтобы избежать даже упоминания об отношениях отрезков определенной длины, Штаудт вместо понятия «двойное отношение»

использует понятие «вурф» (*Wurf*, нем. «бросок»), подчеркивая этим, что для него важно не числовое отношение длин отрезков, а взаимное расположение четырех точек A, B, C, D на прямой такое, что пары (A,B) и (C,D) гармонически сопряжены, т. е., как мы теперь пишем, $(ABCD) = -1$. Для построения проективной шкалы на прямой выбираются произвольно три точки, одна из которых (крайняя) считается бесконечно удаленной, их можно условно обозначить символами 0, 1, ∞. На этой прямой строится четвертая точка так, что получается гармоническая четверка точек. Для построения используется геометрическая конфигурация, называемая четырехсторонником (четырехвершинником), которую использовал уже Л. Карно (см. в части 2 пособия рис. 31 [234, с. 256]). Многократное повторение этой схемы позволяет Штаудту построить на прямой систему точек, эквивалентную обычным целым и рациональным числам. Но эта система точек прямой, построенная Штаудтом, не является полной. Ее можно пополнить, введя аксиому непрерывности (полноты) системы точек прямой, чтобы получить и точки, эквивалентные иррациональным числам. Штаудт вводит и однородные координаты точек на плоскости и в пространстве подобно тому, как это ранее делал Плюккер.

В трех «Дополнениях к геометрии положения» (1856, 1857, 1860) Штаудт показал, что и мнимые точки, которые Плюккер вводил чисто аналитически, можно определить синтетически с помощью так называемых эллиптических инволюций.

Мишель Шаль (Chasles, 1793–1880), выдающийся французский математик и историк математики, родился в Эперноне (близ Парижа). В 1814 г. окончил Политехническую школу в Париже. Еще будучи студентом, опубликовал работу о проективном построении однополостного гиперболоида. С тех пор в течение более 25 лет мало

занимался научной работой, уехал в свою родную провинцию Шартр, занялся там банковским делом и нажил себе большое состояние.

В 1837 г. появился первый его большой труд – замечательная книга «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», она была переведена на многие языки, в том числе в 1883 г. и на русский язык [253]. Здесь он привел и много своих результатов. Шаль впервые выявил роль предшественников (Паппа, Дезарга и др.) в становлении проективной геометрии.

В 1839 г. Шаля избирают членом-корреспондентом Парижской АН (с 1851 г. – академик). С 1841 г. он работает профессором Политехнической школы, а с 1846 г. – профессором Сорбонны, где специально для него была создана кафедра высшей геометрии. С тех пор его научная деятельность продолжалась более 30 лет, выходя за рамки рассматриваемого нами периода. Он является одним из создателей французской научной школы геометров. В 1852 г. выходит его «Трактат по высшей геометрии», а затем еще ряд работ, в том числе учебник геометрии.

В проективной геометрии Шаль, прежде всего, использует синтетические методы, у него здесь много общего со Штейнером, но, возможно, что он пришел к ним самостоятельно. Они оба кладут в основу построения проективной геометрии инвариантность двойного отношения четырех точек прямой и четырех прямых пучка. Шаль аналогично Штейнеру образует и конические сечения. Однако, подобно Мёбиусу, Шаль применяет «правило знаков», рассматривая направленные отрезки. Использует аналитические методы исследования с помощью уравнений, рассматривает мнимые элементы. Шаль ввел в проективную геометрию общее понятие корреляции (коррелятивного преобразования пространства, частным случаем которого является полярное преобразование). Ввел новое направление –

вычислительную геометрию. Шалю принадлежат также работы по кинематической геометрии в механике.

Кроме проективной геометрии, в первой половине XIX в. развивается алгебраическая геометрия, а именно исследование алгебраических кривых и поверхностей порядков выше второго. При этом кривые, вообще говоря, рассматриваются на комплексной проективной плоскости. Классической здесь является книга Ю. Плюккера «Теория алгебраических кривых» (1839). Как уже упоминалось выше, Плюккер ввел линейные («тангенциальные») координаты u_1, u_2, u_3 прямых. Он рассматривает уравнение $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$, определяющее однопараметрическое семейство прямых как уравнение кривой, огибающей это семейство. Это уравнение называется тангенциальным уравнением кривой. Степень обычного (точечного) уравнения алгебраической кривой называется ее порядком, а степень ее тангенциального уравнения – классом. Плюккер вывел носящие его имя формулы, которые связывают числовые характеристики кривой на комплексной проективной плоскости, а именно: порядок, класс, число двойных точек, число точек возврата, число двойных касательных и число точек перегиба кривой. При этом учитывается общее число особенных точек кривой – как действительных, так и мнимых. Например, у Плюккера $w = 3n(n-2) - 6d - 8r$, где w – число точек перегиба, n – порядок кривой, d – число двойных точек, r – число точек возврата. При $n = 3$, $d = 0$, $r = 0$ получается $w = 9$, т. е. кривая C_3 третьего порядка (кубическая кривая) общего вида на комплексной проективной плоскости имеет 9 точек перегиба, включая мнимые. До Плюккера было известно, что кубическая плоская кривая общего вида имеет 3 действительные точки перегиба, а Маклорен в XVIII в. показал, что они лежат на одной прямой. Плюккер добавил к ним 6 мнимых точек перегиба.

В первой половине XIX в. развивалась и теория алгебраических поверхностей. В 1849 г. были опубликованы две статьи – английского математика А. Кэли (1821–1895) и ирландского математика Дж. Сальмона (1819–1904) – о тройных касательных плоскостях к поверхностям третьего порядка. Здесь Кэли установил, что на гладкой кубической поверхности общего вида расположено некоторое число прямых, а Сальмон доказал, что их число равно 27. В 60-х гг. XIX в. эти 27 прямых стали объектом исследования ряда математиков. Было найдено много свойств этой поверхности, а в 1869 г. немецкий математик Х. Винер изготовил модель этой поверхности со всеми 27 прямыми на ней. С современной точки зрения проблему 27 прямых на кубической поверхности рассмотрел советский математик Ю. И. Манин в своей монографии «Кубические формы» (1972). Там на с. 121 он пишет: «Конфигурации двадцати семи прямых на кубической поверхности посвящались целые книги… Их изысканная симметрия одновременно завораживает и раздражает».

Обзоры развития проективной и алгебраической геометрий в XIX в. содержатся в [140, с. 96–98, с. 132–214; 108, с. 33–52; 248; 139, с. 20–26; 197; 74]; проективной – также в книге Ф. Клейна [141, т. 2, с. 133–200] и М. Шаля [253].

— Лобачевский —

Гениальный русский математик **Николай Иванович Лобачевский (1792–1856)** глубоко разработал геометрию, которая носит его имя, и впервые опубликовал работы с ее изложением. Он родился в Нижнем Новгороде в бедной семье уездного землемера. После смерти мужа мать с тремя сыновьями переехала в 1802 г. в Казань – основной культурный центр востока России в ту пору. Здесь Лобачевский заканчивает гимназию и в 1807 г. поступает в открыв-

шийся в 1804 г. на базе гимназии Казанский университет, обучается на казенный кошт. С Казанским университетом будет связана вся его дальнейшая жизнь. В то время большинство преподавателей естественных наук в Казанском университете были немцы, охотно принявшие приглашение в Казань в смутное время наполеоновских войн в Европе. Лекции читались на немецком или французском языках на хорошем уровне. В гимназии и университете Лобачевский проявил свои высокие математические способности. Важную роль в его математическом образовании сыграл М. Ф. Бартельс, который в свое время в качестве помощника учителя обучал молодого Гаусса, а затем учился в Гельмштедтском и Гёттингенском университетах. Отлично учившийся Лобачевский был на грани исключения из университета, т. к. раздражал реакционного инспектора, который вменял ему в вину «худое поведение, мечтательное о себе самомнение, упорство, неповиновение, грубости», а также то, что «в значительной степени проявил признаки безбожия». Благодаря заступничеству профессора математики Бартельса и профессора физики Броннера на ученом совете Лобачевский избежал исключения и в 1811 г. окончил университет, получив степень магистра. В 1814 г. Лобачевский становится адъюнктом (доцентом), в 1816 г. – экстраординарным профессором. В 1819 г. попечителем Казанского учебного округа был назначен реакционер М. Л. Магницкий, который произвел чистку Казанского университета: 9 профессоров были уволены, иностранные профессора, в том числе Бартельс, покинули Россию. Почти вся работа по преподаванию математики и физики легла на плечи молодого Лобачевского. В 1820 г. его избирают деканом физико-математического факультета, а в 1822 г. – ординарным профессором, назначают членом, а с 1825 г. – председателем комитета по строительству зданий университета. В 1827 г. Лобачевского избирают ректором университета, на этом посту он провел 19 лет и проявил себя блестящим организатором. В частности, он принял

энергичные меры по защите университета от эпидемии холеры в 1830 г. и от пожара в 1842 г., уничтожившего часть города. В 1846 г. прекращается деятельность Лобачевского в университете, его назначают помощником попечителя Казанского учебного округа, и он исполняет эту должность до 1855 г.

В 1826 г. Лобачевский на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета сделал доклад о своей работе, содержащей сжатое изложение его новой геометрии, отличной от евклидовой. В 1829–1830 гг. он издал работу в дополненном виде в «Казанском вестнике» под названием «О началах геометрии». Это было первое систематическое, хотя и краткое, изложение основ геометрии Лобачевского. Свою работу он послал в Петербургскую АН, там она получила резко отрицательный отзыв М. В. Остроградского. В 1832 г. выходит работа «Аппендикс» венгерского математика Я. Бояи, содержащая разработку неевклидовой планиметрии в форме «абсолютной геометрии». Лобачевский об этой работе не знал. В дальнейшем выходят работы Лобачевского «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835–1838), «Геометрические исследования по теории параллельных линий» («Geometrische Untersuchungen…», издана на немецком языке в 1840 г. в Германии), «Пангеометрия» (1855).

Работы Лобачевского с изложением его геометрии поначалу встретили резкую критику и непонимание, что было вызвано как новизной идей, так и сжатостью изложения. Даже академики М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский не поняли их содержания и значения. В 1834 г. в реакционном журнале «Сын отечества» некто, подписавшийся инициалами С. С., поместил издевательский памфлет на работу Лобачевского «О началах геометрии». Немецкий рецензент не понял работу Лобачевского «Геометрические исследования по

теории параллельных линий», выделяющуюся среди всех работ Лобачевского о его геометрии наибольшей доступностью изложения. Но она привлекла внимание Гаусса, который ознакомившись с ее содержанием, похвально отзывается о ней в письмах, в частности Шумахеру в 1846 г.: «…автор следует другому пути, отличному от того, которым я шел; это выполнено Лобачевским с мастерством, в чисто геометрическом духе». По предложению Гаусса Лобачевский был избран членом-корреспондентом Гёттингенского ученого общества (академии). Гаусс даже начал было изучать русский язык, чтобы ближе познакомиться с работами Лобачевского. Но в открытой печати Гаусс не высказывался о неевклидовой геометрии, и работы Лобачевского по геометрии получили признание лишь начиная с 1860 г., когда было опубликовано письмо Гаусса к Шумахеру. Работа «Геометрические исследования…» Лобачевского переводится на ряд языков, в том числе и на русский в «Математическом сборнике» в Москве в 1868 г., где во вступительной статье говорится о «весьма замечательных, но мало известных трудах нашего соотечественника», которые «начинают цениться по достоинству в Западной Европе».

Изложение геометрии Евклидом в его «Началах» опирается на определения, аксиомы и постулаты. Он дает следующее определение параллельности: «параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются». Наиболее сложную формулировку имеет V постулат Евклида: если две прямые на плоскости, пересекаясь с третьей, образуют с ней внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$ (т. е. двух прямых углов), то эти две прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше $2d$. Выполнение V постулата равносильно нынешней аксиоме параллельности: через точку, не лежащую на данной прямой,

можно провести не более одной прямой, параллельной данной (у Евклида это было теоремой).

Сложность формулировки V постулата Евклида побуждала многих математиков, особенно в средние века, давать его доказательства с помощью, как это было видно позже, равносильных ему утверждений. Об этом говорилось в части 1 [243, с. 120–123] и части 2 [234, с. 209–210] нашего пособия. В XVIII в. итальянский математик Дж. Саккери и немецкий математик И. Г. Ламберт с помощью предположений, несовместимых с аксиомой параллельности, получили ряд фактов неевклидовой геометрии (см. часть 2 пособия [234, с. 196–200]).

Рассмотрим кратко некоторые особенности геометрии Лобачевского (гиперболической геометрии), которую он назвал «воображаемой». Та часть евклидовой геометрии, которая не опирается на V постулат Евклида (или, что то же, на равносильную ему нынешнюю аксиому параллельности), входит также и в геометрию Лобачевского. В остальном эти геометрии отличаются. В геометрии Лобачевского иной вид имеют: теория параллельности; теоремы о сумме углов в треугольниках и многоугольниках; теорема Пифагора; тригонометрия; отсутствуют подобные, но неконгруэнтные фигуры; иные формулы для площадей и объемов и др.

Геометрия Лобачевского опирается на следующую аксиому параллельности: через точку C вне прямой AB можно провести в плоскости, проходящей через C и AB, более одной прямой, не пересекающей данную прямую AB (рис. 8). Отсюда получается, что таких прямых через точку C можно провести бесконечно много, среди них есть две крайние прямые KL и MN,

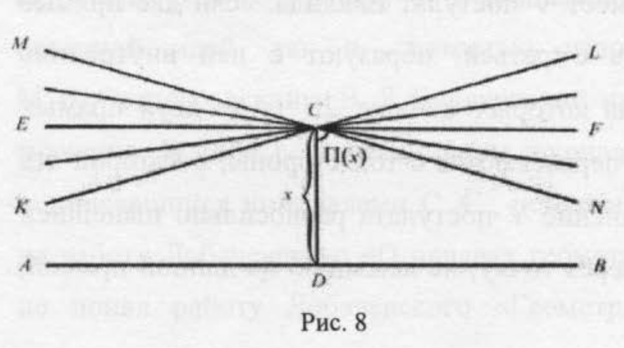


Рис. 8

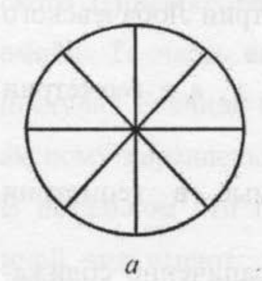
эти две прямые и называются параллельными прямой AB. Таким образом, в плоскости Лобачевского две прямые могут: 1) пересекаться; 2) быть параллельными; 3) быть непересекающимися и непараллельными. Говоря о параллельности прямых, нужно еще указывать направление параллельности. Так, на рис. 8 прямая MN параллельна прямой AB в направлении DB, а прямая KL параллельна AB в направлении DA. Аксиома Лобачевского равносильна тому, что в любом треугольнике сумма углов меньше $2d$. Если MN и AB параллельны в направлении CN, а CD – перпендикуляр к AB, то угол NCD Лобачевский называет углом параллельности, он является функцией длины x перпендикуляра CD: $\angle NCD = \Pi(x)$ (здесь Π – начальная буква в слове «параллельный»). В геометрии Лобачевского $0 < \Pi(x) < \dfrac{\pi}{2}$ и функция $\Pi(x)$ убывает с ростом x, а в геометрии Евклида всегда $\Pi(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Параллельные прямые в геометрии Лобачевского в направлении параллельности неограниченно сближаются, а в противоположном – неограниченно удаляются друг от друга. Прямые непересекающиеся и непараллельные называют расходящимися, они имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого неограниченно удаляются друг от друга.

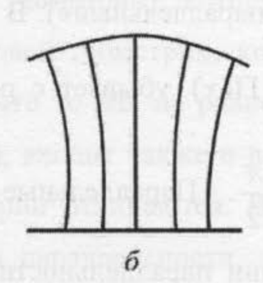
В геометрии Евклида существуют два вида пучков прямых: пучок прямых, проходящих через одну точку, и пучок параллельных прямых. В геометрии Лобачевского можно выделить три вида пучков:

1) пучок пересекающихся прямых – совокупность прямых, проходящих через некоторую точку (центр пучка);
2) пучок расходящихся прямых – совокупность прямых, перпендикулярных к некоторой прямой;
3) пучок параллельных прямых – совокупность прямых, параллельных некоторой прямой в заданном на ней направлении.

В своей геометрии Лобачевский рассматривает следующие кривые линии (рис. 9):

1) окружность – множество точек, равноудаленных от некоторой точки (центра окружности), это ортогональная траектория пучка пересекающихся прямых (рис. 9, *а*);
2) эквидистанта (кривая равных расстояний) – множество точек, равноудаленных от данной прямой (базы) и лежащих по одну сторону от этой прямой; эквидистанта является ортогональной траекторией пучка расходящихся прямых (рис. 9, *б*);
3) предельная линия (орицикл) – ортогональная траектория пучка параллельных прямых (рис. 9, *в*).





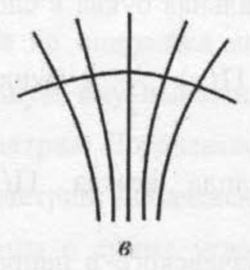


Рис. 9

Эквидистанта и предельная линия являются аналогами окружности, но они незамкнуты и неограничены в обе стороны. Окружность и эти ее аналоги могут скользить по себе самим, как и прямая. При построении планиметрии Лобачевского исключительную роль играют предельные линии.

Обозначая через a и b – катеты, через c – гипотенузу прямоугольного треугольника ABC и полагая $\angle A = \Pi(a')$, $\angle B = \Pi(b')$, где $\Pi(x)$ – угол параллельности, Лобачевский устанавливает формулы вида $\Pi(a) = \Pi(b') + \Pi(c + a')$, $\Pi(c - a') = \Pi(b') + \Pi(a)$ и др. [121, с. 238]. Используя эти формулы, а также установленные им свойства

дуг предельных линий и отрезков касательных к ним, Лобачевский путем остроумных вычислений получает основные формулы своей тригонометрии. Приведем примеры его формул в случае прямоугольного треугольника [121, с. 255–257]:

$$\text{I)}\quad \operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A;$$

$$\text{II)}\quad \cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos B;$$

$$\text{III)}\quad \cos\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\operatorname{tg}A;$$

$$\text{IV)}\quad \sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b).$$

А в случае произвольного треугольника, например, «теорема синусов» имеет вид

$$\text{V)}\quad \frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin B} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin C}$$

[121, с. 258].

Используя указанные выше две формулы связи для $\Pi(x)$ при различных значениях аргументов и формулу II, Лобачевский находит, что функция $\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2}$ удовлетворяет функциональному уравнению $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = a^x = e^{-\frac{x}{k}}$ $(k>0)$ [121, с. 261–262]. Следовательно, $\operatorname{ctg}\frac{\Pi(x)}{2} = e^{\frac{x}{k}}$ ($k>0$ – некоторая постоянная). Это основная формула геометрии Лобачевского. Отсюда легко получается, что $\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{k}$, $\cos\Pi(x) = \operatorname{th}\frac{x}{k}$, $\sin\Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}$, поэтому, например, указанные выше уравнения I–V принимают вид

$$\text{I')}\quad \operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin A;$$

II') $\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos B$;

III') $\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg} A$;

IV') $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$;

V') $$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

Геометрию Лобачевского иногда называют гиперболической геометрией.

В силу того, что $\operatorname{sh} x \sim x$, $\operatorname{th} x \sim x$, $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$, формулы I′–V′ при малых $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ приближенно заменятся формулами $a = c\sin A$, $a = c\cos B$, $a = b\operatorname{tg} A$, $c^2 = a^2 + b^2$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ тригонометрии Евклида, то же будет и с другими формулами тригонометрии Лобачевского. Таким образом, «в малом» геометрия Лобачевского близка к геометрии Евклида. Формула для $\Pi(x)$ и формулы тригонометрии Лобачевского содержат некоторую абсолютную единицу длины k, которая отсутствует в геометрии Евклида. Аналогичную роль в сферической тригонометрии играет радиус сферы, а в евклидовой планиметрии – прямой угол. В геометрии Лобачевского $k > 0$, но если формально считать k чисто мнимым, полагая $k = Ri$, то в силу того, что $\operatorname{sh} ix = i\sin x$, $\operatorname{ch} ix = \cos x$, тригонометрия плоскости Лобачевского перейдет в евклидову сферическую тригонометрию. Лобачевский рассматривал этот факт как подтверждение непротиворечивости своей тригонометрии.

Длину окружности Лобачевский находит как предел последовательности периметров p_n вписанных в окружность правильных многоугольников. Если сторону такого многоугольника обозначить через $2a_n$, то для треугольника с гипотенузой R (радиусом окружности), катетом a_n и противолежащим ему острым углом $\frac{\pi}{n}$ по формуле I получается $\operatorname{ctg}\Pi(a_n) = \operatorname{ctg}\Pi(R)\sin\frac{\pi}{n}$. Отсюда, учитывая что $p_n = 2na_n$, находим

$$p_n \frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_n)}{a_n} = 2\operatorname{ctg}\Pi(R) n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Длина окружности $C(R) = \lim_{n\to\infty} p_n$, кроме того, $\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_n)}{a_n} = \frac{1}{a_n}\operatorname{sh}\frac{a_n}{k} \to \frac{1}{k}$, $n\sin\frac{\pi}{n} \to \pi$ при $n \to \infty$, следовательно, $C(R) = 2\pi k \operatorname{ctg}\Pi(R) = 2\pi k \operatorname{sh}\frac{R}{k}$. Независимо от Лобачевского эта формула была найдена Гауссом, Тауринусом и Бояи.

Для вычисления площадей многоугольников достаточно знать площадь треугольника. В геометрии Лобачевского она находится по формуле $S = k^2(\pi - A - B - C)$, где A, B, C – углы треугольника. Число $\delta = \pi - A - B - C$ называется дефектом треугольника. Таким образом, площадь любого треугольника здесь ограничена сверху числом $k^2\pi$.

Лобачевский кладет начало дифференциальной геометрии на своей гиперболической плоскости тем, что выводит элемент длины кривой в виде $ds^2 = \frac{dx^2}{\sin^2\Pi(y)} + dy^2$ и элемент площади фигуры в виде

$dS = \dfrac{dxdy}{\sin \Pi(y)}$ и использует их для вычисления длин дуг и площадей, а элемент объема $dV = \dfrac{dxdydz}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}$ – для вычисления объемов фигур.

Вращение каждой из кривых Лобачевского – окружности, эквидистанты и предельной линии – вокруг какой-либо из прямых (оси) соответствующего пучка дает в пространстве Лобачевского следующие поверхности: сферу Лобачевского, эквидистанту плоскости (поверхность равных расстояний) и предельную поверхность (орисферу). Оказывается, что на предельной поверхности выполняется геометрия Евклида, если в качестве «прямых» рассматривать предельные линии. Более того, Лобачевский показывает, что тригонометрия на его сфере совпадает со сферической тригонометрией в евклидовом пространстве (до Лобачевского этот факт оставался неизвестным). Лобачевский и Бояи приводят ряд примеров вычисления длин дуг, площадей, объемов и площадей поверхностей фигур в своей геометрии. Длину дуги предельной линии они находили как геометрически, так и интегрированием элемента длины. Отметим, что если записать уравнение предельной линии $e^{\frac{y}{k}} = e^{\frac{x}{k}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{k}} - 1}$ [244, с. 102] в ином виде, а именно $x = k \ln \operatorname{ch} \dfrac{y}{k}$, то ее длину можно вычислить проще, чем это делали интегрированием Лобачевский и Бояи. Действительно, $ds = \sqrt{\left(\operatorname{ch} \dfrac{y}{k}\right)^2 dx^2 + dy^2} = \operatorname{ch} \dfrac{y}{k} dy$, $s = k \operatorname{sh} \dfrac{y}{k} = k \operatorname{ctg} \Pi(y)$. Гиперболические функции (и современные их обозначения) тогда еще не получили распространения, хотя их ввел В. Риккати в XVIII в. Их записывали в виде выражений через экспоненты (Гаусс, Бояи) или

через угол параллельности $\Pi(x)$ (Лобачевский) в формулах неевклидовой геометрии.

Некоторые из своих результатов Лобачевский находил двумя способами: разбиением фигуры на элементарные части или в целом интегрированием в разных координатах. Совпадение этих результатов придавало ему, хотя и косвенно, уверенности в непротиворечивости своей геометрии. Для выяснения того, какая из геометрий – его или евклидова – имеет место в физическом мире, Лобачевский приводит и астрономические расчеты, но он находит, что необходимая для этого точность наблюдений далеко превосходит ту, которую дают астрономические инструменты. Лобачевский не смог решить вопрос о непротиворечивости своей геометрии в целом, хотя и доказал непротиворечивость своей тригонометрии. Этот вопрос был решен позже с появлением интерпретаций геометрии Лобачевского путем построения моделей, на которых имеет место его геометрия.

Первую интерпретацию планиметрии Лобачевского дал итальянский математик **Эудженио Бельтрами (1835–1900)** в статье «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии» (1868). Здесь он рассматривает поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, которые называет псевдосферическими, обычно их называют псевдосферами. Он задает параметрически псевдосферу в круге $u^2+v^2 \le a^2$ так, что выполняется условие: всякая хорда круга $u^2+v^2 \le a^2$ отображается в геодезическую на этой поверхности. Исходя из этого условия, он находит выражение линейного элемента ds^2 на псевдосфере. Исследуя ds^2, Бельтрами получает, что через любые две точки псевдосферы проходит единственная геодезическая. Рассматривая пересекающиеся и непересекающиеся хорды в круге $u^2+v^2 \le a^2$, Бельтрами приходит к выводу о справедливости для геодезических на псевдосфере аксиомы параллельности Лобачевского.

Вычисления Бельтрами длины геодезической окружности, угла параллельности для геодезических и суммы углов геодезического треугольника приводят к тем же формулам, что и на плоскости Лобачевского. Бельтрами замечает, что тригонометрические соотношения для геодезического треугольника на псевдосфере, полученные в 1840 г. Ф. Г. Миндингом из сферических путем замены радиуса R сферы на Ri, совпадают с формулами тригонометрии Лобачевского, если записать их в виде, содержащем угол параллельности $\Pi(x)$. Бельтрами отмечает, что Лобачевский указал на справедливость обратного перехода – от своих уравнений к уравнениям сферической тригонометрии. Все это приводит Бельтрами к заключению: «Из предыдущих результатов, нам кажется, вполне выступает соответствие, существующее между неевклидовой планиметрией и псевдосферической геометрий» [195, с. 180–204].

Одним из конкретных примеров псевдосфер является рассмотренная в 1839 г. Миндингом поверхность, которая получается вращением трактрисы

$$y = \pm\left(\sqrt{k^2 - x^2} - k\ln\frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{2}\right)$$

вокруг ее асимптоты – оси Oy (рис. 3). Гауссова кривизна этой псевдосферы в каждой ее точке равна $K = -\frac{1}{k^2}$, здесь постоянная k играет роль, аналогичную радиусу R сферы, для которой $K = \frac{1}{R^2}$.

Интересно, что работа Лобачевского «Воображаемая геометрия» во французском переводе вышла в 1837 г. в журнале Крелле, в котором в 1840 г. вышла и работа Миндинга с описанием тригонометрии геодезических на псевдосферах, но ни Лобачевский, ни Мин-

динг не заметили совпадения этой тригонометрии с тригонометрией Лобачевского.

Интерпретация Бельтрами планиметрии Лобачевского на псевдосферах произвела огромное впечатление на математиков. Геометрия Лобачевского, которая до этого рассматривалась как нечто «воображаемое», получила в отношении планиметрии наглядную реализацию и способствовала ее признанию математиками. Однако эффектная интерпретация Бельтрами плоскости Лобачевского как псевдосферы в евклидовом пространстве не является полной уже хотя бы потому, что псевдосфера изображает лишь часть плоскости Лобачевского (это видно, если разрезать псевдосферу по меридиану). Кроме того, на плоскости Лобачевского нет особых линий, но, как показал Гильберт в 1901 г., в евклидовом трехмерном пространстве всем псевдосферам присущи особенности.

Вскоре появились корректные интерпретации плоскости Лобачевского – модели в круге и на полуплоскости, – построенные без обращения к псевдосферам. Немецкий математик **Феликс Клейн (1849–1925)** в работе «О так называемых неевклидовых геометриях» (1871) трактует плоскую геометрию Лобачевского как геометрию внутренности открытого круга, т. е. без ограничивающей его окружности, которая называется здесь «абсолютом». При этом «точками» плоскости Лобачевского называются точки этого круга, «прямыми» – хорды круга, параллельным прямым отвечают хорды с общим концом на абсолюте. На рис. 10 через точку M, лежащую вне прямой KL, проходят две прямые EK и FL, параллельные KL, которые отделяют проходящие через точку M прямые, расходящиеся с KL, от пересекающих KL. Используя так называемую проективную метрику Кэли, Клейн вводит расстояние между точками C и B круга (рис. 11) по формуле

$$d_{CB} = \alpha\left|\ln(ABCD)\right|, \text{ в которой } (ADCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

представляет собой двойное отношение точек A, B, C, D на хорде AD, а α – фиксированная постоянная ($\alpha = \frac{k}{2}$, где k – абсолютная единица длины в геометрии Лобачевского). Если точка C приближается к A или точка B приближается к D (рис. 11), то $d_{CB} \to +\infty$. Следовательно, хорда изображает бесконечную прямую Лобачевского, а окружность (абсолют) – совокупность бесконечно удаленных точек плоскости (бесконечно удаленную прямую). Через логарифм некоторого двойного отношения Клейн определяет и угол. Проективные преобразования переводят прямые снова в прямые и сохраняют двойное отношение точек. Клейн показал, что движения плоскости Лобачевского, т. е. взаимно однозначные преобразования этой плоскости, сохраняющие расстояния, изображаются в его интерпретации проективными преобразованиями, переводящими предельную окружность (абсолют) в себя. На модели Клейна выполняется планиметрия Лобачевского, причем интерпретируется вся плоскость

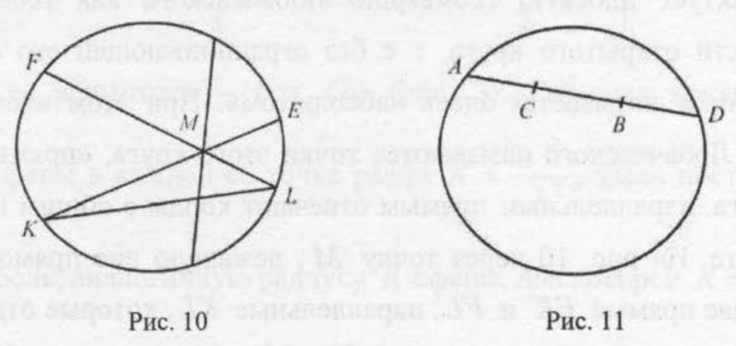


Рис. 10 Рис. 11

Лобачевского, а не ее отдельные части. Эту интерпретацию называют иногда интерпретацией Бельтрами–Клейна, т. к. отдельные ее элементы были уже у Бельтрами. Клейн распространил свою

интерпретацию и на геометрию Лобачевского в пространстве, заменив круг шаром.

Французский математик **Анри Пуанкаре (1854–1912)**, исследуя группы дробно-линейных преобразований в комплексной плоскости, пришел в 1882 г. к двум интерпретациям геометрии Лобачевского. В одной из них (рис. 12) в качестве плоскости Лобачевского рассматривается верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

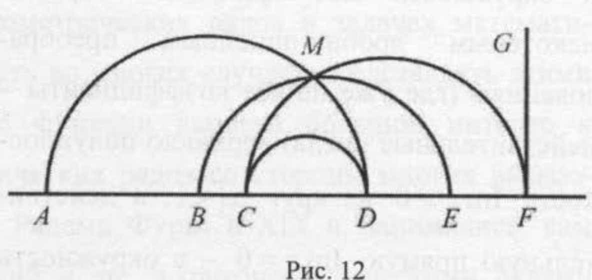


Рис. 12

Роль прямых Лобачевского в этой полуплоскости выполняют полуокружности или полупрямые, ортогональные действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$. Пуанкаре вводит неевклидово расстояние d_{MN} между точками M, N полуокружности, оно обладает свойством: если отрезок MN дуги полуокружности увеличивается так, что один или оба его конца приближаются к действительной оси, то $d_{MN} \to +\infty$, поэтому действительная ось играет роль бесконечно удаленной прямой в плоскости Лобачевского. Параллельным прямым Лобачевского отвечают полуокружности с общим концом на действительной оси. На рис. 12 «прямые» AMD и FMC параллельны «прямой» (полуокружности) CD, а «прямая» BME расходится с ней. Углам между прямыми Лобачевского отвечают обычные углы между полуокружностями. В этой интерпретации движения плоскости Лобачевского осуществляются дробно-линейными преобразованиями $\tilde{z} = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d – действительные числа, $ad - bc = 1$, они переводят верхнюю полуплоскость и действительную ось в себя и сохраняют введенные Пуанкаре длины и площади, а также углы.

(Дробно-линейные преобразования являются одним из видов конформных отображений, т. е. непрерывных отображений $f(z)$, сохраняющих углы между кривыми.)

Всякое дробно-линейное преобразование обладает свойством: оно переводит окружности или прямые в комплексной плоскости снова в окружности или прямые. Отображая некоторым дробно-линейным преобразованиям (где уже не все коэффициенты – действительные числа) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|z| < 1$, а действительную прямую $\operatorname{Im} z = 0$ – в окружность $|z| = 1$, Пуанкаре получает вторую интерпретацию плоскости Лобачевского – в круге $|z| < 1$ (рис. 13). Прямым Лобачевского здесь отвечают дуги окружностей (в частности диаметры) в круге $|z| < 1$, ортогональные к предельной окружности $|z| = 1$, которая играет роль бесконечно удаленной прямой. Параллельным прямым Лобачевского отвечают дуги окружностей, касающиеся друг друга в точках предельной окружности $|z| = 1$. Неевклидовы углы здесь совпадают с обычными. Движения описываются дробно-линейными преобразованиями, переводящими круг $|z| < 1$ и окружность $|z| = 1$ в себя, они сохраняют введенное Пуанкаре расстояние, а также углы. Клейн распространил первую интерпретацию Пуанкаре на геометрию Лобачевского в пространстве, заменив полуплоскость полупространством.

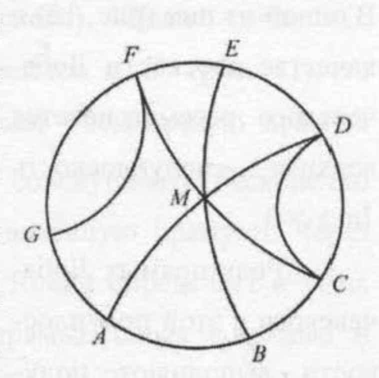


Рис. 13

Кроме создания неевклидовой геометрии, Лобачевский получил также ряд результатов в анализе и алгебре. В области анализа ему

принадлежат две статьи о рядах Фурье (1834, 1835), статья о ряде Фурье и о Г-функции (1841) и две статьи о вычислении определенных интегралов (1852, 1853). В XVIII в. основным средством аналитического представления функций были степенные ряды. Положение изменилось в XIX в. после введения класса непрерывных функций и разного рода разрывных функций.

Важная роль тригонометрических рядов в задачах математической физики и возможность во многих случаях представлять этими рядами также и разрывные функции вызвала большой интерес к исследованию тригонометрических рядов со стороны многих выдающихся математиков XIX в. Рядами Фурье в XIX в. занимались: сам Фурье, Дирихле, Лобачевский и др., а тригонометрическими рядами общего вида, включающими ряды Фурье как частный случай, – Риман, Кантор и др. Характер сходимости различен у тригонометрического и степенного ряда. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R,R)$, где R – радиус сходимости ряда, а сумма степенного ряда – бесконечно дифференцируема на $(-R,R)$. Вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в точках $x=\pm R$ исследуется особо. Но для установления сходимости тригонометрического ряда на каком-либо множестве основного промежутка требуется доказывать его сходимость в каждой точке этого множества. Сумма тригонометрического ряда может быть разрывной во многих точках. Для рядов Фурье справедлив принцип локализации Римана: сходимость ряда Фурье для функции $f(x)$ в точке x_0 зависит лишь от поведения функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки. До Римана этим принципом пользовались, хотя и не в общей форме, Фурье, Пуассон, Дирихле, Остроградский, Лобачевский. Необходимость

судить о сходимости тригонометрического ряда в отдельных точках привела к представлению о функции как о, вообще говоря, произвольном соответствии двух точечных множеств (пока без термина «множество»).

Лобачевский в работе «Об исчезновении тригонометрических строк» (1834) дает свое определение функции, которое состоит в следующем: «Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данные вместе… Итак, под названием функции должно вообще разуметь число, которого постепенные изменения даны и зависят от изменений другого, хотя бы совершенно неизвестным образом» [цит. по: 137, с. 51].

Это определение не является четким. Относительно его общности мнения историков математики расходятся [137, с. 51–53]. В выражении «постепенные изменения» слово «постепенные» у Лобачевского понимается в смысле «непрерывные», о чем он говорит в следующей своей работе 1835 г., а под нарушением «постепенности» там имеет в виду разрывы функции. Определение Лобачевским функции направлено против обязательности задания функции аналитическим выражением, как и определение Фурье функции в работе 1822 г. (см. выше с. 94), с которой Лобачевский был знаком. То же касается и определения Дирихле 1837 г., которое приведено на с. 194.

Лобачевский уделяет большое внимание исследованию сходимости рядов, с которыми имеет дело в своих работах. Для этого он часто использует свой признак сходимости ряда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m – наибольший

номер членов a_n, удовлетворяющих неравенству $a_n \geq 2^{-m}$, $n = 1, 2, \ldots, p_m$.

До Лобачевского не исследовался вопрос о законности почленного интегрирования ряда Фурье. В работе 1834 г. он рассматривает соответствующую теорему для ряда Фурье функции $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$ в предположении, что $f(x)$ интегрируема (точнее надо было – абсолютно интегрируема) на $(-\pi, \pi)$, не обосновывая, однако, законности перехода к пределу под знаком интеграла от частичной суммы ряда Фурье. В работе 1841 г. Лобачевский снова возвращается к этой теореме и получает оценку, которая может служить оценкой остатка ряда Фурье, достаточной для оправдания законности перехода к пределу под знаком интеграла, но он не делает соответствующих выкладок. Полное доказательство теоремы о почленном интегрировании ряда Фурье дал Лебег в 1906 году. В работе 1835 г. Лобачевский доказывает теорему о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ при условиях: $f(x)$ ограничена и дифференцируема на $(-\pi, \pi)$, за исключением конечного числа точек, в которых $f'(x) = \pm\infty$, при этом он также не обосновывает законность перехода к пределу под знаком интеграла.

В работе 1841 г. Лобачевский приводит совершенно оригинальное изложение теории Γ-функции, основанное, в частности, на исследовании свойств функции $f(x, \alpha)$, которую он определяет равенством

$$(\alpha + x)(\alpha + x - 1)\ldots(\alpha + 1) = (x + \alpha)^{x + \alpha + \frac{1}{2}} e^{-x} f(x, \alpha),$$

где $x \in \mathbb{N}$, α – произвольное. Сложные выкладки, связанные с использованием признака Лобачевского сходимости ряда, непривычные обозначения и не вполне четкое изложение были причиной отрицательного

отзыва Остроградского на эту работу. Но все же в этой работе содержалось представление $\ln \Gamma(x)$ в виде двойного обобщенного степенного ряда, которое Лобачевский получил на четыре года раньше, чем французский математик Бинэ.

В работе 1852 г. Лобачевский доказывает прежде всего формулу

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

в предположении, что $f(\pi \pm x) = f(x)$ и существует интеграл в левой части. Там же он получает формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^h f(x) \varphi[z(\lambda - x)] dx = [f(\lambda + 0) + f(\lambda - 0)] \int_0^{\infty} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} dx,$$

где $\psi'(x) = \varphi(x)$, $0 < \lambda < h \le +\infty$. Это обобщение интеграла Фурье, который получается отсюда при $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \sin x$, $h = +\infty$. Лобачевский получает также общую формулу, связанную с обращением преобразования Лапласа. Лобачевский вычислил много определенных интегралов сложного вида, часть из них была включена позже в справочники по определенным интегралам.

В 1834 г. в университетской типографии был напечатан учебник Лобачевского «Алгебра или исчисление конечных», содержащий арифметику, алгебру, а также основные элементарные функции: степенную, логарифмическую, показательную и тригонометрические. При этом, как и у Коши в «Алгебраическом анализе», функции $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$ и e^x вводились как решения функциональных уравнений для соответствующих степенных рядов с использованием только понятий предела и непрерывности, без привлечения дифференцирования. Функции $\sin x$ и $\cos x$ вводятся в виде степенных рядов с помощью тождества $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. В главе 17 Лобачевский излагает

различные способы численного решения алгебраических уравнений и приводит найденный им способ численного нахождения корней (в том числе и комплексных) таких уравнений путем возведения корня несколько раз в квадрат. Он не знал, что в 1826 г. сходный способ в менее разработанном виде предложил бельгийский физик и математик Ж. П. Данделен. Независимо от них швейцарский математик К. Г. Греффе, ученик Гаусса, работавший в Цюрихе, в своей брошюре в 1837 г., посланной на конкурс Берлинской АН, подробно изложил этот способ и проиллюстрировал на многочисленных примерах. Этот способ был назван его именем, а изложения этого способа Данделеном и Лобачевским не привлекли внимания математиков и их приоритет в этом вопросе был установлен лишь в курсе Уиттекера и Робинсона в 1924 году. Лобачевский получил также некоторые результаты, относящиеся к теории вероятностей и астрономии. Работы Лобачевского по геометрии, как и другие его достижения, получили публичное признание только после его смерти.

О Лобачевском: [121; 122; 123; 51, гл. 6; 108, с. 57–74; 5, с. 394–409; 21, вып. 2, с. 9–230; 137, с. 48–55; 195, с. 27–70, с. 117–120].

—— Неевклидова геометрия у Гаусса и Тауринуса ——

Славу открытия и разработки неевклидовой геометрии во многом разделяют с Лобачевским немецкий математик Гаусс и венгерский математик Бояи. То, что, как и в случае с теорией эллиптических функций, сразу три гениальных математика независимо и близко по времени открыли и разработали неевклидову геометрию, говорит о закономерном процессе возникновения математических теорий, диктуемом логикой развития математики. Первым, хотя и далеко не столь систематически, разработал неевклидову геометрию Гаусс, ему принадлежит и термин «неевклидова геометрия». Познакомившись с работой Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных

линий», Гаусс пишет о «воображаемой» геометрии Лобачевского астроному Шумахеру: «Вы знаете, что уже пятьдесят четыре года (с 1792) как я разделяю те же взгляды, не говоря здесь о некоторых развитиях, которые получили мои идеи об этом предмете впоследствии». Получив ряд фактов из допущения, что V постулат Евклида не выполняется, Гаусс вначале сомневался в том, что при дальнейшем исследовании не получится противоречия. Но уже около 1817 г. он осознает, что, кроме евклидовой, существует и другая геометрия, опирающаяся на отрицание V постулата Евклида. Гаусс не торопился с опубликованием своих результатов, а тем, кого в письмах посвящал в эти вопросы, воспрещал делать их достоянием гласности, опасаясь нападок со стороны лиц, которые не поняли бы его непривычных идей, разрушающих традиционные взгляды на геометрию.

Точку зрения Гаусса на возможность построения неевклидовой геометрии разделял **Фердинанд Карл Швейкарт (1780–1857)**, работавший профессором права в Харьковском университете в 1812–1817 гг., а затем в Германии. В 1818 г. он передал Гауссу через астронома Герлинга заметку, в которой писал, что, кроме евклидовой геометрии, существует еще астральная («звездная») геометрия, имеющая место где-то в космосе, и привел несколько основных фактов, относящихся к неевклидовой геометрии. Гаусс ответил Герлингу: «Заметка г-на Швейкарта доставила мне необычайно много удовольствия, и я прошу высказать ему от меня по этому поводу как можно больше хорошего. Почти все это списано с моей души» [195, с. 103–105].

Под влиянием Швейкарта его племянник **Франц Адольф Тауринус (1794–1874)**, работавший в Германии, начал заниматься теорией параллельных. Гаусс в письме к Тауринусу сообщает о некоторых своих результатах в неевклидовой геометрии (здесь же впервые употребляется и этот термин). Тауринус в 1825 г. публикует

брошюру, посвященную теории параллельных, а в 1826 г. – ее дополненный и исправленный вариант. Здесь Тауринус излагает ряд фактов неевклидовой геометрии, известных ему уже от Швейкарта, но продвигается значительно дальше. Заслугой Тауринуса является то, что здесь он впервые опубликовал неевклидову тригонометрию, показав, что она получается из сферической тригонометрии заменой радиуса R сферы чисто мнимым Ri. С ее помощью он находит формулы для длины окружности, площади круга, площади поверхности и объема шара в неевклидовой геометрии. Изложение Тауринуса было сжатым и далеко не строгим. В предисловии ко второй брошюре он в осторожной форме высказывает пожелание, чтобы Гаусс опубликовал свои воззрения по этим вопросам. Это пожелание явно не понравилось Гауссу, и он не ответил Тауринусу. В припадке тяжелой депрессии Тауринус сжег имевшиеся у него экземпляры своих брошюр. Лишь в конце XIX в. удалось разыскать уцелевшие экземпляры двух брошюр Тауринуса.

В письме к Бесселю в 1829 г. Гаусс писал: «Вероятно я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком». (В древней Греции беотийцами называли грубых и невежественных людей.) Но уже в 1829–1830 гг. Лобачевский опубликовал свое изложение неевклидовой геометрии в работе «О началах геометрии», не побоявшись непонимания и резкой критики, которой была встречена эта работа. Гаусс ничего не публиковал по неевклидовой геометрии, его исследования в этой области стали известны из опубликованных после его смерти писем и отдельных набросков, а также замечаний к работам Бояи и Лобачевского. Около 1816 г. Гаусс первым владел тригонометрией

гиперболической плоскости, а свои более или менее систематические наброски неевклидовой геометрии написал около 1831 г., до знакомства с работами Бояи и Лобачевского [195, с. 105–112].

Бояи

Гениальный венгерский математик **Янош Бояи (Больаи, Бойаи, 1802–1860)** открыл самостоятельно и примерно в то же время, что и Лобачевский, неевклидову геометрию, но опубликовал ее в 1832 г., на три года позже, чем Лобачевский, в виде так называемой «абсолютной геометрии» в широком смысле.

Янош Бояи родился в семье венгерского математика Фаркаша Бояи (1775–1856) в г. Коложвар (ныне г. Клуж) в Трансильвании – области на северо-западе Румынии (в XIX в. эта область входила в состав Австро-Венгрии). Фаркаш Бояи во время учебы в Гёттингенском университете близко подружился с Гауссом, очень заинтересовался вопросом о параллельных линиях, обсуждал его с Гауссом, а впоследствии предпринимал попытки доказать V постулат Евклида. После окончания университета Фаркаш работал три года в Коложваре, а затем в качестве профессора математики в г. Марош-Вашархей в Трансильвании (сейчас это г. Тыргу-Муреш в Румынии). Янош Бояи после окончания в 1823 г. военно-инженерной академии в Вене находился в течение 10 лет на военной службе в г. Темешвар (ныне Тимишоара в Румынии), а выйдя в отставку, жил в Марош-Вашархее. На службе, располагая досугом, Янош с увлечением занимается теорией параллельных линий, которой начал заниматься еще в Вене. Уже в 1823 г. он пишет отцу: «Правда, я не достиг еще цели, но получил весьма замечательные результаты – из ничего я создал целый мир». Отец умолял его оставить занятия теорией параллельных, ссылаясь на свой горький опыт в этом вопросе: «Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен его

страшиться, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя – оно тебе погубит всю радость жизни» [121, с. 175].

Но Янош не последовал этим советам. В 1825 г. он представил отцу свой первый систематический очерк неевклидовой геометрии и потом далее продолжал ее разрабатывать. Отец не понял работу Яноша по неевклидовой геометрии, но согласился поместить ее как приложение («Аппендикс») к своему обширному курсу математики («Тентамен»), над которым работал в течение 20 лет. Этот курс вместе с «Аппендиксом» Яноша был опубликован в 1832 г. на латинском языке, но еще в 1831 г. вышли отдельные оттиски «Аппендикса». Фаркаш попросил Гаусса сообщить свое мнение о работе своего сына. Получив письмо и «Аппендикс», Гаусс написал Герлингу: «Я считаю этого молодого геометра фон Бояи гением первой величины». Фаркашу Бояи Гаусс ответил: «Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что *я ее не должен хвалить* [подчеркнуто Гауссом], то на мгновение ты поразишься, но я не могу иначе: хвалить ее – значило бы хвалить себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, – почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30–35 лет тому назад. Я чрезвычайно этим поражен. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей совершенно не имеют правильного понятия о том, о чем идет здесь речь… Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому очень поражен тем, что я освобожден от этой необходимости, и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил» [121, с. 177–178].

Дальнейшая судьба Яноша Бояи трагична. Он был глубоко расстроен ответом Гаусса и считал, что жадный «колосс Гаусс» хочет

похитить у него приоритет открытия неевклидовой геометрии. У Яноша очень обострились отношения с отцом в связи с семейными обстоятельствами. Янош становится все более раздражительным. Очередным ударом для него явилось то, что его работу о негеометрическом построении теории комплексных чисел, посланную в 1837 г. на конкурс в Лейпциг, жюри не поняло и отклонило. В ней Янош открыл современное построение комплексных чисел как пар действительных чисел, это построение также разработал в 1833–1835 гг. ирландский математик У. Р. Гамильтон и опубликовал в 1837 году. Все это привело Яноша Бояи к тяжелой психической депрессии. Новым ударом было для него поступившее от Гаусса в 1848 г. известие о работе Лобачевского «Geometrische Untersuchungen…» по неевклидовой геометрии. В том же году Янош тщательно ознакомился с этой работой и составил к ней обширные «Замечания», которые были опубликованы только в 1902 году. В начале этих замечаний Янош высказывает необоснованные предположения о том, что Лобачевский мог разработать неевклидову геометрию после знакомства с «Аппендиксом» или что Гаусс «сам обработал теорию и выпустил в свет под именем Лобачевского».

В дальнейшем Янош Бояи, не обладая широким математическим образованием и осведомленностью, пытается доказать ряд явно неверных утверждений: например, что каждое алгебраическое уравнение допускает решение в радикалах или что каждая элементарная функция допускает интегрирование в элементарных функциях и др. Это приводит к новым разочарованиям и далее обостряет его психическое состояние. Фаркаш Бояи так и не понял изложения неевклидовой геометрии его сыном и Лобачевским и продолжал доказывать V постулат Евклида. Наиболее интересное свое доказательство V постулата Евклида он опубликовал в 1851 г., оно основано на эквивалентном V постулату Евклида утверждении: «три

точки, не лежащие на одной прямой, всегда принадлежат некоторой окружности» (см., например, [51, с. 104–105]).

Остановимся вкратце на особенностях неевклидовой геометрии Бояи. Полное название его работы «Аппендикс» таково: «Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)». Здесь XI аксиома Евклида означает V постулат Евклида. Работа Бояи изложена строго, но очень сжато, со многими условными обозначениями, поэтому читается с очень большим трудом. В издании 1950 г. на русском языке примечания В. Ф. Кагана к этой работе занимают больше места, чем сама работа Бояи [244].

Основная установка Бояи – построить геометрию «абсолютно истинную», т. е. не зависящую от истинности или ложности V постулата Евклида. Это проявляется уже в определении Бояи параллельности лучей, которое может быть выражено словами: лучи bn и am, лежащие в одной плоскости, называются параллельными, если луч am не встречает луча bn, но встречает всякий луч bp, проходящий в угле abn (рис. 14). Вместо термина «параллельные лучи» Бояи использует обозначение вида $bn \parallel am$, а в подстрочном примечании в немецком издании «Аппендикса» говорит: «bn есть асимптота am». Определение Бояи параллельности лучей одинаково пригодно как для евклидовой, так и для неевклидовой (гиперболической) геометрий. Он называет евклидову геометрию системой Σ, а неевклидову – системой S. Предельную линию он обозначает через L, а предельную поверхность – через F, не вводя для них никаких терминов. При выводе в неевклидовой (гиперболической) геометрии S основной

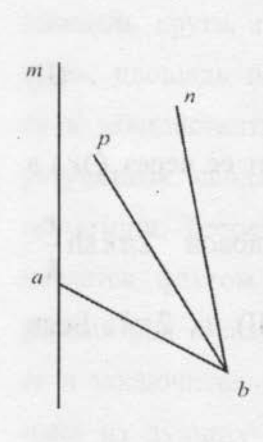


Рис. 14

формулы, соотношений между элементами треугольника и др. Бояи пользуется как углом параллельности (обозначая его через u), так и функцией $\bigcirc r$, представляющей длину окружности радиуса r.

В своей работе Бояи стремится изложить как можно больше фактов, которые формулируются одинаково как в системе Σ, так и в системе S, т. е. относятся к его абсолютной геометрии. Сюда входят, в частности, ряд теорем о параллельных прямых, сферическая тригонометрия, которая одинакова в системах Σ и S. По существу Бояи осуществляет синтез евклидовой и неевклидовой геометрий в той их части, где это возможно. Некоторые факты, различные в этих геометриях, он модифицирует таким образом, что получаются утверждения, верные как в Σ, так и в S. Например, теорема синусов в евклидовой геометрии Σ имеет вид

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \tag{I}$$

а в неевклидовой геометрии S – вид

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C}. \tag{II}$$

Длина окружности радиуса r (Бояи обозначает ее через $\bigcirc r$) в евклидовой геометрии равна $2\pi r$, а в неевклидовой $2\pi k \operatorname{sh}\frac{r}{k}$. Умножая соотношения (I) на 2π, а соотношения (II) на $2\pi k$, Бояи получает формулу

$$\frac{\bigcirc a}{\sin A}=\frac{\bigcirc b}{\sin B}=\frac{\bigcirc c}{\sin C},$$

общую для систем Σ и S. Для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c на гиперболической плоскости аналогом теоремы Пифагора являются соотношения

$$(\bigcirc c)^2=(\bigcirc a)^2+(\bigcirc b)^2\operatorname{ch}^2\frac{a}{k},\ \ (\bigcirc c)^2=(\bigcirc a)^2\operatorname{ch}^2\frac{b}{k}+(\bigcirc b)^2.$$

Для Бояи это факты абсолютной геометрии, т. к. в пределе при $k\to\infty$ превращаются в формулу, выражающую теорему Пифагора в евклидовой плоскости. Таким образом, Бояи понимает абсолютную геометрию в более широком смысле, чем принято сейчас, когда к абсолютной геометрии относят факты евклидовой геометрии, которые можно доказать независимо от V постулата Евклида. В целом плоская неевклидова (гиперболическая) тригонометрия, которую Бояи развивает в своей работе, не поддается его синтезу, но «в малом» переходит в евклидову тригонометрию, а на предельной поверхности F имеет место евклидова тригонометрия, если в качестве прямых брать предельные линии на F.

В § 32 «Аппендикса» Бояи выводит выражение для элемента длины кривой в гиперболической плоскости. Здесь же он, используя дифференцирование и интегрирование, вычисляет в неевклидовой геометрии площади некоторых криволинейных четырехугольников, площадь круга, площадь поверхности шара и его сегмента, объем шара, площадь поверхности и объем тела, полученного вращением дуги эквидистанты вокруг ее базы. Он отмечает, что «в малом» эти результаты сводятся к соответствующим результатам евклидовой геометрии. Теорема о сумме углов прямолинейного треугольника не является фактом абсолютной геометрии, т. к. имеет существенно разный вид в евклидовой и гиперболической плоскостях. Он относит ее в заключительный § 43 своей работы «Аппендикс». Эта работа – одна из лучших в математической литературе XIX в., но написана очень сжато.

О Бояи: [121, гл. IV, V; 244; 108, с. 60–61, с. 64–65; 51, с. 195–196; 195, с. 71–100, с. 112–117].

Лобачевский в своем оригинальном учебнике «Геометрия», написанном в 1823 г. еще до того, как он начал разрабатывать неевклидову геометрию, выделил в первых четырех главах абсолютную геометрию из геометрии Евклида, а материал, опирающийся на теорию параллельных Евклида, изложил в дальнейших главах. Учебник не был напечатан из-за отрицательного отзыва петербургского академика Н. И. Фусса, не понявшего новизны изложенных в нем идей. Лобачевскому принадлежит основная роль в создании неевклидовой (гиперболической) геометрии, а также приоритет в ее опубликовании. Он не побоялся, что его не поймут, а продолжал, невзирая на резкую критику, развивать неевклидову геометрию в ряде своих работ. Последнюю из них – «Пангеометрию» – он продиктовал уже незадолго до смерти, будучи почти полностью слепым. Лобачевский, в отличие от Бояи, основное внимание обращает на анализ различий евклидовой и своей геометрии, поэтому разработка неевклидовой геометрии Лобачевским является более полной и включает также начала дифференциальной и аналитической неевклидовой геометрии.

До создания неевклидовой геометрии на протяжении более двух тысяч лет геометрия опиралась на свои застывшие классические основы, приданные ей Евклидом. Немецкий философ Иммануил Кант (1724–1804) считал геометрические истины врожденными формами человеческого сознания. Создание неевклидовой геометрии опровергло эти представления и положило начало широкой эволюции геометрии. Выдающийся английский математик У. К. Клиффорд (1845–1879) в своих «Лекциях и очерках» (1870) писал: «Между Коперником и Лобачевским существует любопытная параллель. Коперник и Лобачевский – оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение. Причина их громадного значения заключается в

том, что они суть революции в нашем понимании космоса...». Не менее важно их значение и для развития математики. Вскоре Риман создал свою эллиптическую геометрию (геометрию пространств положительной кривизны), а также общую, так называемую риманову геометрию n-мерного пространства. А. Кэли и Ф. Клейн получали различные метрические геометрии из проективной. Ф. Клейн в 1872 г. предлагает групповую классификацию геометрий. Бельгийский математик Ж.-М. де-Тилли и английский математик Р. С. Болл в 80-х гг. XIX в. положили начало исследованиям по механике неевклидова пространства. Открытие специальной теории относительности привело к рассмотрению так называемого псевдоевклидова пространства, а общей теории относительности – к псевдориманову пространству.

—— Остроградский ——

Один из наиболее выдающихся математиков и механиков **Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862)** родился в семье небогатого помещика дворянина, потомка известного казацкого рода, в селе Пашенное Кобелякского уезда Полтавской губернии (ныне село Пашеновка Козельщанского района Полтавской области). В восьмилетнем возрасте Михаил был определен в «дом для воспитания бедных дворян» в Полтаве, где одним из его воспитателей был вышедший в отставку из армии известный украинский писатель И. П. Котляревский. В 1810 г. Михаил вместе со своим старшим братом поступает в Полтавскую гимназию. После года обучения его способности были определены как «острые». Однако уровень обучения в гимназии был низким, и вскоре учеба перестает интересовать Остроградского, особенно изучение иностранных языков. Он уходит из гимназии, не окончив ее, и мечтает поступить в гвардейский полк. В 1816 г. отец повез его в Петербург для определения в гвардию, но в пути им встретился дядя Михаила со стороны матери, который горячо реко-

мендовал определить Михаила к поступлению в Харьковский университет. Живя на квартире адъюнкта университета, преподавателя военных наук М. К. Робуша, Остроградский готовится к поступлению в университет. После успешной сдачи экзаменов его в сентябре 1817 г. зачисляют студентом физико-математического факультета. Остроградский переходит на квартиру к выдающемуся преподавателю математики Андрею Федоровичу Павловскому (1788–1857), который прививает ему страстную любовь к математике. Павловский говорил, что уже через два-три месяца почувствовал большую разницу между собой как приобретшим знания усидчивым трудом, и Остроградским, который, обладая блестящим дарованием, быстро усваивал готовое и тут же творил свое.

Большое влияние на Остроградского оказали лекции русского педагога-математика **Тимофея Федоровича Осиповского (1766–1832)**. Он родился в семье деревенского священника во Владимирской губернии, окончил Петербургскую учительскую гимназию в 1786 г., переименованную позже в Педагогический институт, работал сначала в Москве и Петербурге, а в 1803–1820 гг. – в Харьковском университете профессором кафедры чистой математики, которой он заведовал. В 1813–1820 гг. он был ректором Харьковского университета. Большой популярностью пользовался его трехтомный «Курс высшей математики» общим объемом в 1266 страниц (первые два тома вышли в 1801–1802 гг., а третий – в 1823 г.). Преподаватель философии А. И. Дудрович подал попечителю учебного округа З. Я. Карнееву донос на Т. Ф. Осиповского, обвиняя последнего в вольнодумстве. В результате в 1820 г. Осиповский был отстранен от преподавания в университете. Он уехал в Москву, где продолжал заниматься наукой. Несколько его научных работ, посвященных главным образом оптическим явлениям в земной атмосфере, были опубликованы Петербургской академией наук. Он перевел также первые четыре тома «Небесной механики» Лапласа, этот перевод не был напечатан. Подробнее о

Т. Ф. Осиповском говорится в [196, с. 171–188; 21, вып. 5, с. 28–74] и в книге И. Н. Кравеца «Тимофей Федорович Осиповский – выдающийся русский ученый и мыслитель» (М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 103 с.).

М. В. Остроградский уже через два года после поступления в Харьковский университет весьма успешно сдал экзамены по всей программе обучения и получил аттестат об окончании университета. В 1819 г. он возвращается в университет «для усовершенствования себя в прикладной математике» (т. е. механике) и через год подвергается экзаменам на степень кандидата. Все шло успешно, однако Дудрович отказался экзаменовать Остроградского по философии, ссылаясь на то, что тот не посещал лекций по этому предмету. Остроградский получил разрешение Совета университета на сдачу этого экзамена и благополучно его сдал. В 1821 г. Совет университета постановил присудить ему ученую степень кандидата. К решению Совета Дудрович приложил свое особое мнение, в котором указал, что Остроградский не посещал лекций не только по философии, но и по богословию. Поэтому решение Совета университета о присвоении Остроградскому степени кандидата не было утверждено вышестоящими инстанциями. Более того, министр просвещения и духовных дел князь Голицын распорядился считать недействительным и выданный Остроградскому диплом об окончании Харьковского университета.

Неудачи с получением дипломов только укрепили решимость Остроградского посвятить себя математике и приобщиться к научным исследованиям. Несмотря на очень скромные финансовые средства, он в 1822 г. едет в Париж и проводит там более пяти лет. В то время в Париже работали выдающиеся математики Лаплас, Коши, Пуассон, Фурье и др. Остроградский слушает лекции этих математиков в Парижском университете, Коллеж де Франс и посещает еженедельные заседания Парижской академии наук. Он не ставит перед собой цель получения диплома (иностранные дипломы в России не признавались)

и не сдает экзаменов, а приступает к научным исследованиям в области математического анализа и математической физики. На его быстрые успехи обратили внимание Лаплас, в семье которого он часто бывал, пользовался его библиотекой и приводил ее в порядок, и Коши, с которым Остроградский обсуждал свои результаты. Коши в работе «Об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825) пишет: «Наконец один русский молодой человек, одаренный большой проницательностью и весьма искусный в исчислении бесконечно малых, Остроградский, дал новое доказательство формул, мною выше упомянутых, и обобщил другие формулы, помещенные мной в 19-й тетради Политехнической школы. Господин Остроградский любезно сообщил мне главные результаты своей работы». В 1826 г. Остроградский доложил свою знаменитую работу «О распространении волн в цилиндрическом бассейне» на заседании Парижской АН, куда ее представил Коши, а в 1832 г. она была напечатана в журнале Академии. Остроградский написал ее в долговой тюрьме, куда он попал, задолжав с оплатой гостиницы, т. к. не получил своевременно денег из дому. Коши выкупил его из долговой тюрьмы и рекомендовал на место преподавателя в лицее – Колледже Генриха IV. А. П. Юшкевич в 1963 г. обнаружил в парижских архивах еще четыре работы, написанные Остроградским в период его пребывания в Париже, но не опубликованных тогда. В одной из них содержится доказательство знаменитой формулы Остроградского о выражении кратного интеграла через интеграл по поверхности. Возвратясь в Россию, Остроградский опубликовал эту работу под названием «Заметка по теории теплоты» (1831).

Несмотря на научные успехи, жизнь в Париже не прельщала Остроградского, его тянуло в Петербург, куда он и переезжает в мае 1828 года. Путь от Франкфурта в Германии до Дерпта в Эстонии ему довелось пройти пешком, т. к. пассажиры почтовой кареты, в которой он ехал, были ограблены вооруженными бандитами. По приезде в

Петербург он представил в Академию наук три работы: «Заметку об интеграле, встречающемся в вычислении притяжения сфероидов», «Заметку об определенных интегралах» и «Заметку по теории теплоты». Слава об успехах Остроградского в Париже докатилась в Россию еще до его возвращения. В 1828 г. его избирают адъюнктом Петербургской академии наук, а в 1831 г. в возрасте 30 лет он без защиты диссертации был избран ординарным академиком. На протяжении более 30 лет Остроградский принимает в деятельности Петербургской академии активнейшее участие: сделал более 80 докладов, читал циклы публичных лекций, писал многочисленные рецензии, работал в разных комиссиях Академии, а в каждом томе трудов Академии помещал и свои работы. Он был также членом академий: Американской (1834), Туринской (1841), Римской (1853), членом-корреспондентом Парижской АН (1856).

Остроградский был также выдающимся педагогом. Он преподавал математику в Морском кадетском корпусе, Институте корпуса инженеров путей сообщения, Главном педагогическом институте, Артиллерийском и Главном инженерном училищах. Пользовались большой популярностью его пособия: «Курс небесной механики» (1831), «Лекции по аналитической механике» (1834), «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» (1837). В 1830 г. Остроградский совершил научную командировку в Париж, представил свой «Курс небесной механики» в Парижскую академию наук и получил хвалебный отзыв Пуассона и Араго. В этой поездке в Париж он потерял правый глаз. Свои работы Остроградский писал на французском языке. В академических изданиях «Избранные труды» (М., 1958) и «Полное собрание трудов» (К., 1959–1961. – Т. 1–3) М. В. Остроградского они даны уже в русском переводе.

Остроградский был интересным и остроумным собеседником. Обладая прекрасной памятью, он хорошо знал литературные и

исторические произведения, помнил наизусть многие стихи Т. Г. Шевченко, который после ссылки некоторое время жил у него на квартире. Почти ежегодно Остроградский проводил свой отпуск в своем имении на Полтавщине. Он был полным, высоким мужчиной с громким голосом. Умер Остроградский в 1862 г. в Полтаве и похоронен в семейном склепе Остроградских в с. Пашенное.

Большинство работ Остроградского относится к математической физике и механике, меньше – к математическому анализу. Но наибольшую известность получили его результаты в математическом анализе, которые и в настоящее время входят в учебники. Эти результаты мы рассмотрим в первую очередь.

Самым известным достижением Остроградского является одна из основных теорем классического многомерного анализа – формула Остроградского, выражающая кратный интеграл по области через интеграл по ограничивающей ее поверхности. При $n = 3$ эта формула имеет вид

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy .$$

Остроградский выводит ее (в несколько других обозначениях) в начале работы «Заметка по теории теплоты», доложенной им Петербургской АН в 1828 г. и опубликованной в 1831 году. В этой работе он применяет свою формулу к исследованию распространения тепла в твердом теле. Приоритет Остроградского в установлении этой важной теоремы был отмечен и в западной литературе. Максвелл в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873) пишет: «Эта теорема впервые дана Остроградским в 1828 г.». В «Мемуаре об исчислении вариаций кратных интегралов» (1835) Остроградский обобщает свою формулу на n-мерный случай, а именно доказывает формулу, выражающую

n-кратный интеграл по области через соответствующий $(n-1)$-кратный интеграл по границе этой области. Формулу Остроградского иногда называют формулой Остроградского–Гаусса, т. к. при $n=3$, $P=x$, $Q=y$, $R=z$ она имеется в работе Гаусса 1813 года.

Остроградский первым привел геометрическую трактовку вопроса о замене переменных в кратных интегралах. Двойные интегралы были введены Эйлером в работе 1769 года. Там же Эйлер получил чисто формально, без строгого обоснования, формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

(в других обозначениях). Лагранж в работе 1773 г. получил формулу замены переменных в тройном интеграле, но с помощью ошибочных рассуждений. Остроградский в работе «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836) указал на несостоятельность рассуждений Лагранжа и впервые истолковал выражение вида $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ (в других обозначениях) как площадь криволинейного четырехугольника в плоскости Ouv. Об истории этого вопроса см. [60, т. 2, с. 291–293, 356]. В неопубликованных рукописях Остроградский рассматривает и вопрос о замене переменных в n-кратном интеграле при $n>3$, следуя формальному методу Эйлера. В 1841 г. Якоби в работе «О функциональных определителях», а также бельгийский математик Э. Ш. Каталан рассматривают вопрос о замене переменных в n-кратном интеграле, используя формальный метод Эйлера.

В работе «Об интегрировании рациональных дробей» (1845) Остроградский привел носящий его имя и вошедший в учебники математического анализа метод выделения рациональной части

неопределенного интеграла от рациональной функции. В 1872 г. появилась небольшая работа французского математика Шарля Эрмита, в которой содержится результат, равносильный методу Остроградского, поэтому в западной литературе этот метод носит имя Эрмита, хотя Остроградский разработал его раньше и более глубоко.

Имя Остроградского вошло также в учебники обыкновенных дифференциальных уравнений. В маленькой «Заметке о линейных дифференциальных уравнениях», доложенной в 1838 г. и опубликованной в 1839 г., Остроградский для линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

выводит формулу

$$W(x) = ae^{-\int a_1(x)dx},$$

где $W(x)$ – определитель Вроньского, a – постоянная. Польский математик Юзеф Гёне-Вроньский (1778–1853) ввел свой определитель в 1812 г. (Остроградский не выписывает явно определитель Вроньского, обозначая его через Δ). При $n = 2$ эта формула встречается у Абеля в 1827 году. Французский математик Жозеф Лиувилль (1809–1882) в работе 1838 г. получил аналог этой формулы для линейной однородной системы дифференциальных уравнений (позже его получил и Якоби), поэтому указанную выше формулу и ее аналог для системы называют формулой Лиувилля–Остроградского. Понятие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения ввел немецкий математик Э. Б. Кристоффель (1829–1900) в 1858 г., а понятие фундаментальной системы решений для такого уравнения – немецкий математик И. Э. Фукс (1833–1902) в 1866 году.

Первой работой Остроградского по математической физике явился «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», доложенный Парижской АН в 1826 г. и опубликованный в 1832 году. Теорией волн до Остроградского занимались Ньютон, Лагранж, Лаплас, а в 1815 г. – Фурье, при этом рассматривался только случай, когда жидкость имеет бесконечную глубину и отсутствуют стенки. Остроградский впервые освобождается от этих ограничений, за ним это делает Пуассон в 1828 году. Для решения уравнения Лапласа, записанного в цилиндрических координатах, Остроградский использует метод Фурье разделения переменных. При этом Остроградский оригинально выводит представление цилиндрических функций целого индекса с помощью интеграла Пуассона.

До Остроградского в работах Фурье и Пуассона по теории теплопроводности рассматривались случаи охлаждения твердого шара, цилиндра, куба и прямоугольного параллелепипеда. Остроградский обобщает задачу: решает уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (k > 0)$$

в случае тела произвольной формы, ограниченного поверхностью без особых точек, при соответствующих начальном и краевом условиях. (По традиции он использует букву d вместо ∂ в обозначении частных производных, буква ∂ с этой целью использована еще Лежандром в 1786 г., но вошла в употребление в частных производных лишь после ее систематического использования Якоби.) Свои исследования теплопроводности твердых тел Остроградский изложил в двух «Заметках по теории теплоты». В первой из них (она уже упоминалась выше в связи с формулой Остроградского из анализа) он решает уравнение теплопроводности (при $k = 1$) с начальным условием

$v = f(x, y, z)$ при $t = 0$ и однородным краевым условием $\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0$, где n – внешняя нормаль к поверхности тела, h – постоянная. Он использует метод Фурье разделения переменных, приводит общую схему решения задачи на собственные значения, доказывает ортогональность собственных функций при различных собственных значениях, представляет решение в виде ряда по собственным функциям и указывает на возможность доказательства сходимости этого ряда в частном случае, когда он представляет собой тригонометрический ряд. При этом он отмечает свойство тригонометрического ряда, получившее позже название принципа локализации. Во «Второй заметке по теории теплоты» (1831) Остроградский решает уравнение теплопроводности с начальным условием $v = f(x, y, z)$ при $t = 0$ и неоднородным краевым условием $\frac{\partial v}{\partial n} + hv = T(x, y, z, t)$. Такая произвольная зависимость правой части краевого условия от времени впервые рассмотрена Остроградским. Он сводит эту задачу к задаче с неоднородным уравнением и однородными краевыми условиями и получает решение в виде ряда, но не исследует его сходимости.

Не ограничиваясь общими рассмотрениями, Остроградский решает также задачу теплопроводности для призмы с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Он не публиковал своего решения, но его приводит с указанием на Остроградского выдающийся французский математик **Габриэль Ламе (1795–1870)** в своей работе «О распространении тепла в многограннике», доложенной Петербургской АН в 1829 г., а затем в «Лекциях по аналитической теории теплоты» (1861). В 1820–1831 гг. Ламе работал профессором Петербургского института путей сообщения, а затем – во Франции в Политехнической школе и Сорбонне. Ламе занимался геометрией и математической физикой, его имя носят так

называемые коэффициенты криволинейной ортогональной системы координат, коэффициенты в теории упругости, известны также специальные функции Ламе, обыкновенное дифференциальное уравнение Ламе второго порядка.

В работе 1836 г. Остроградский впервые выводит уравнение теплопроводности для сжимаемой жидкости. Особенностью этой работы является также то, что при выводе уравнения он использует не элементарный параллелепипед, как это делалось раньше в математической физике, а выделяет элементарную область конечного объема и применяет к ней свою формулу из анализа.

Плодотворную научную деятельность Остроградского в области механики нет возможности осветить в небольшом очерке по истории математики. Сделаем лишь некоторые общие замечания. Остроградский посвятил механике примерно 20 работ, в том числе пособия «Курс небесной механики» и «Лекции по аналитической механике». В ряде работ он обобщает метод Лагранжа возможных перемещений на случай систем с освобожденными связями – нестационарными, неудерживающими (односторонними). Ряд работ Остроградского посвящен интегрированию уравнений динамики. Здесь он развивает теорию канонических уравнений движения, обобщая результаты Гамильтона и Якоби на случай наличия связей, зависящих от времени. Остроградский также получает более общий, чем у Гамильтона, принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона–Остроградского). В одной из работ Остроградский распространяет принцип возможных перемещений на явление неупругого удара, получает основную формулу теории удара и ряд следствий из нее. Остроградского по праву считают основоположником русской школы механики. Работая в военных учебных заведениях, он не мог остаться в стороне от применения механики к военному делу. Ему было высочайше повелено составить программу и провести опыты по стрельбе

регулируемыми снарядами. Теоретические и практические результаты этой работы Остроградский опубликовал в нескольких статьях. Здесь он обобщает результаты исследований Пуассона по баллистике, касающиеся учета условий, влияющих на полет снаряда. С работами Остроградского по механике можно подробнее ознакомиться, например, по комментариям к его «Избранным трудам» (М., 1958), монографиям «История механики в России» (К., 1987) [247] и [157–159].

Обширные «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа», читанные Остроградским в Морском кадетском корпусе, были записаны его слушателями, морскими офицерами С. Бурачеком и С. Зеленым и опубликованы на русском языке в 1837 году. Эти лекции отражали состояние алгебры в то время и оказали большое влияние на повышение алгебраических знаний в России. Остроградский подробно излагает методы решения алгебраических уравнений и впервые в России приводит изложение результатов Абеля о неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени $n \geq 5$. Также впервые на русском языке здесь подробно излагается теория чисел. Но «Руководство по начальной геометрии» (1855–1860) Остроградского было неудачно в методическом отношении ввиду очень абстрактного изложения, малодоступного учащимся. Для знакомых с геометрией это руководство представляло несомненный интерес. Заметим, однако, что геометрия находилась вне сферы научных исследований Остроградского. Можно только сожалеть, что он, не поняв геометрии Лобачевского, дал в 1832 г. резко отрицательный отзыв на книгу Лобачевского «О началах геометрии». Вот выдержки из отзыва: «Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели: большая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видел ее». И Остроградский делает вывод, что книга Лобачевского «не заслуживает внимания Академии». Понимание и признание неевкли-

довой геометрии началось уже после смерти Лобачевского и Остроградского, а к Лобачевскому пришла слава гениального геометра. В других же областях математики и в механике на протяжении более 30 лет крупнейшим специалистом в России был Остроградский, работы которого были известны и в Западной Европе.

Лекции Остроградского пользовались большим успехом у слушателей, а он сам производил сильное впечатление на тех, с кем общался. Его педагогические воззрения нашли отражение в брошюре «Размышления о преподавании», написанной им в соавторстве с французским педагогом А. Блумом. В частности, там говорится и о значении истории математики в преподавании: «Мы без колебания заявляем, что изучение биографий людей, принесших пользу наукам и искусству, является одним из средств, которое мы используем, чтобы привлечь внимание учеников. Это в одно и то же время отличная разрядка и средство с помощью живого рассказа запечатлеть то или иное основное положение либо удачное приложение теоретических принципов».

Об Остроградском: [245; 124; 206; 246; 207; 125; 120, т. 2, с. 52–58, с. 589–591; 247, с. 162–172; 196, с. 255–291; 273].

—— Буняковский ——

Выдающийся математик и педагог **Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)** родился в г. Бар (ныне Могилевского района Винницкой области) в семье подполковника кавалерийского полка. Отец умер, когда Виктору было пять лет. Начальное образование Виктор получил в Москве в доме графа А. П. Тормасова (друга отца), а в 1820–1825 гг. учился за границей, в частности в Париже, где в это время учился и Остроградский, с которым он подружился. После защиты диссертации в Париже в 1825 г. Буняковский получил степень доктора математических наук. В 1826 г. он переезжает в Петербург и преподает

математику в Морском корпусе (1827–1862), Институте корпуса инженеров путей сообщения (1830–1846) и в Петербургском университете (1846–1859). В 1828 г. его избирают адъюнктом Петербургской академии наук, в 1830 г. – экстраординарным, а в 1841 г. – ординарным академиком. С 1864 г. в течение 25 лет он являлся вице-президентом Петербургской АН. Буняковский не имел никаких родовых имений и содержал свою большую семью на средства, зарабатываемые личным трудом.

Буняковский является автором 210 научных работ. Большая часть из них относится к теории чисел и теории вероятностей. Ему принадлежат также работы по анализу, теории конечных разностей, математической физике, геометрии и механике. В анализе его имя носит важное неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx,$$

которое он получил в работе «О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам или интегралам в конечных разностях» (1859). Ранее аналогичное неравенство для сумм получил Коши. На 16 лет позже Буняковского неравенство для интегралов опубликовал и немецкий математик Г. Шварц, поэтому в западной литературе оно носит имя Шварца.

Работы Буняковского по теории чисел возродили в России интерес к этой науке, которой в XVIII в. очень успешно занимался в Петербургской академии Л. Эйлер. Интерес Буняковского к теории чисел и теории вероятностей оказал большое влияние на молодого Чебышёва, когда тот начинал в 1847 г. свою деятельность в Петербургском университете. Буняковский в Академии привлек Чебышёва в качестве своего помощника по изданию трудов Эйлера в теории чисел. «Основания математической теории вероятностей»

(1846) Буняковского было лучшим в то время руководством по теории вероятностей. Кроме изложения теории этой науки, оно содержит историю ее возникновения и развития, а также многочисленные ее приложения к страхованию, демографии и т. п. Буняковский был первым пропагандистом страхового дела в России. В работе 1865 г. он предложил новый способ составления таблиц смертности, позволивший точнее, чем принятые ранее способы, судить о распределении населения по возрастам (тогда еще не проводилась перепись населения). После работ Буняковского наблюдается блестящий расцвет теории вероятностей в России.

В первой трети XIX в. русская математическая терминология была еще не разработанной, а книг по математике на русском языке было крайне мало. Буняковский в значительной степени восполнил этот пробел. В 1831 г. он напечатал свой перевод «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» Коши под названием «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении». Буняковский задумал издать лексикон (словарь) математических терминов в трех томах. В 1839 г. вышел первый том «Лексикона чистой и прикладной математики» Буняковского. Но занятость другими делами помешала Буняковскому закончить этот труд.

Ряд работ Буняковский посвятил теории параллельных в геометрии. Наибольший интерес в этом отношении представляет его мемуар «Параллельные линии» (1853), в котором дается исторический обзор многочисленных попыток доказать V постулат Евклида и их классификация на четыре группы. Приводит он и свое «доказательство» V постулата Евклида. Тем не менее прискорбно, что, занимаясь (в отличие от Остроградского) теорией параллельных, Буняковский, как и Остроградский, не признает неевклидовой геометрии. В упомянутом выше мемуаре нет ни слова о Лобачевском, основные труды которого по неевклидовой геометрии к тому времени уже были опубликованы. А в

мемуаре «Рассмотрение некоторых странностей, имеющих место в построениях неевклидовой геометрии» (1872) Буняковский выступает с необоснованной критикой неевклидовой геометрии. Он был высокого мнения о Лобачевском как о математике, но не в области геометрии.

Работая в Академии наук, В. Я. Буняковский, как и М. В. Остроградский, вел активную педагогическую деятельность в учебных заведениях С.-Петербурга. Он преподавал высшую математику в Первом кадетском корпусе (1827–1831); высшую математику и механику в офицерских классах Морского корпуса (1827–1864); по 6 часов в неделю читал дифференциальное и интегральное исчисление в Институте корпуса инженеров путей сообщения (1830–1846). Этот институт был в то время высшим техническим учебным заведением России. Здесь Буняковский использовал в качестве учебника свой перевод «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» Коши, разработав программу курса. Кроме того, будучи избран в 1846 г. ординарным профессором С.-Петербургского университета, читал там в 1846–1860 гг. теорию вероятностей по своему учебнику. После избрания в 1864 г. вице-президентом С.-Петербургской АН Буняковский за недостатком времени оставил преподавание.

Руководство Буняковского «Арифметика» (1844), а также его программы по арифметике и начальной геометрии для учебных заведений сыграли большую роль в повышении образования в России. Он был прекрасным педагогом, слушатели восторженно вспоминают о его лекциях. Глубокое уважение своих слушателей и сослуживцев он завоевал своими личными качествами – благожелательностью и отзывчивостью.

В 1875 г. к 50-летию научной деятельности В. Я. Буняковского поклонники его таланта (около 400 человек) на свои средства основали премию имени В. Я. Буняковского. Она выплачивалась раз в три года в размере 500 рублей (на проценты с собранной суммы) физико-

математическим отделением Академии наук за лучшие работы по математике (но не действительным членам Академии). Лауреатами этой премии были: П. А. Некрасов (1884), К. А. Поссе (1887), Н. Я. Сонин (1889), М. А. Тихомандрицкий и Г. Ф. Вороной (1896).

О Буняковском: [226; 227; 196, с. 292–323; 15, с. 81–82].

— Дирихле —

Выдающийся немецкий математик **Петер Густав Лежён-Дирихле (1805–1859**) (у нас пишут только вторую часть его фамилии) родился в г. Дюрен в Германии в семье французского происхождения. Его отец был почтмейстером. После окончания гимназии Дирихле в 1822–1827 гг. продолжает свое образование в Париже, где слушает лекции в Сорбонне и Коллеж де Франс, а на жизнь зарабатывает частными уроками. Он поддерживает тесную связь с математиками из окружения Фурье. В 1827–1828 гг. работает в Бреслау (ныне Вроцлав в Польше), а затем переезжает в Берлин, где в течение 26 лет работает в университете сначала в качестве доцента, с 1831 г. – экстраординарного профессора и с 1839 г. – ординарного. В 1831 г. его избирают членом Берлинской АН. Работу в университете он совмещает с преподаванием в военной и строительной академиях. С 1855 г. занимает кафедру математики в Гёттингенском университете, ставшую вакантной после смерти Гаусса. Лекции Дирихле в Берлинском университете оказали большое влияние на Римана. Дирихле удается получить для Римана должность у себя на кафедре в Гёттингене. После смерти Дирихле Риман занимает его кафедру в Гёттингене.

Дирихле внес большой вклад в теорию чисел, а также обогатил важными результатами анализ и математическую физику. В 1825 г. он почти одновременно с Лежандром нашел доказательство Великой теоремы Ферма для $n = 5$ и опубликовал его в 1828 году. Дирихле первым глубоко понял «Арифметические исследования» Гаусса,

постоянно носил с собой эту книгу, изучал ее и излагал ее содержание в своих лекциях. В 1837 г. Дирихле доказал знаменитую теорему о том, что в любой арифметической прогрессии $nd + a$, $n = 0,1,2,\ldots$, первый член которой a и разность d – натуральные взаимно простые числа, содержится бесконечно много простых чисел. Она носит его имя. Эту теорему впервые высказал Эйлер в 1783 г., а Лежандр в 1788 г. попытался ее доказать. Она очень просто доказывается для некоторых прогрессий частного вида, например $4n+3$ или $6n+5$, но общее ее доказательство сложное. Дирихле применяет в доказательстве средства анализа, полагая начало аналитическому направлению в теории чисел. Идея Дирихле заключается в том, чтобы доказать расходимость ряда $\sum \frac{1}{p}$, распространенного на все простые числа p, содержащиеся в арифметической прогрессии, откуда следует, что таких чисел p бесконечно много. Он вводит ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, называемые рядами Дирихле. Они обобщают ζ-функцию $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Дирихле рассматривает ее при действительных $s > 1$. Ранее ее рассматривал Эйлер, доказавший тождество $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, где произведение берется по всем простым p. Для выделения из ряда для $\zeta(s)$ слагаемых, отвечающих $n = p$, где p – простые числа в арифметической прогрессии, Дирихле вводит важные теоретико-числовые функции, называемые характерами. Функция $\chi(n) \equiv \chi(n,k)$ называется характером Дирихле по модулю $k > 1$, если она определена на множестве целых чисел и обладает свойствами: $\chi(n) \not\equiv 0$, $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, $\chi(n+k) = \chi(n)$, $\chi(n) = 0$, если n и k не

взаимно просты. Здесь условие периодичности позволяет трактовать характер $\chi(n)$ при фиксированном $k>1$ как функцию, заданную на приведенной системе вычетов по модулю k. Далее особую роль в доказательстве Дирихле играет ряд Дирихле вида $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ (L-ряд Дирихле), где $s>1$, $\chi(n)$ – характер. Дирихле исследует свойства характеров и L-рядов. Осуществляя предельный переход при $s\to 1+0$, он получает требуемое. В 1841 г. Дирихле перенес эту теорему на прогрессии с целыми комплексными числами.

Важное значение имели работы Дирихле по установлению асимптотических формул для некоторых теоретико-числовых функций. По аналогии с приближением кривой к асимптоте он предложил называть более простую функцию асимптотическим законом для более сложной, если отношение этих функций стремится к единице при неограниченном возрастании аргумента. В работах 1838 г. и 1849 г. он получает асимптотику для $\sum_{k\le n}\tau(k)$ при $n\to\infty$, где $\tau(k)$ – число делителей числа k. В работе 1838 г. с помощью своих рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s}$, где $F(n)$ – различные числовые функции, он находит асимптотики для средних значений некоторых теоретико-числовых функций. В работе «Исследования о различных применениях анализа бесконечно малых в теории чисел» (1839, 1840) он доказывает формулы для числа классов квадратичных форм данного определителя. Аналогичные формулы и набросок схемы доказательства имелись в одной неоконченной рукописи Гаусса. В работе 1842 г. Дирихле переносит эти результаты на квадратичные формы с целыми комплексными коэффициентами, предварительно обобщив тождество Эйлера для ζ-функции. Эти исследования привели Дирихле к его

теореме о комплексных единицах в алгебраической теории чисел. В теории диофантовых приближений имя Дирихле носит теорема: для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ существуют целые x и y, удовлетворяющие неравенству $|\alpha x - y| < \frac{1}{n}$, где $0 < x \le n$. «Лекции Дирихле по теории чисел» издал Р. Дедекинд в 1863 г. со своими дополнениями уже после смерти Дирихле (имеется русский перевод 1936 года).

Дирихле в работе 1837 г. о рядах Фурье дает следующее определение: «Будем понимать под a и b два фиксированных значения, а под x – переменную величину, принимающую все значения, расположенные между a и b. Если теперь каждому x соответствует одно единственное конечное y и притом так, что когда x непрерывно пробегает интервал от a до b, $y = f(x)$ также непрерывно изменяется, то y называется непрерывной функцией от x для этого интервала... Геометрически представленная (т. е. если мыслить x и y как абсциссу и ординату), непрерывная функция оказывается связной кривой, на которой всякой содержащейся между a и b абсциссе соответствует только одна точка» [цит. по: 137, с. 53].

Здесь четко определена однозначность соответствия, но определение носит кинематический характер с использованием переменных величин. Оно не соответствует современной ситуации, когда сначала дается общее определение функции, а уже затем – непрерывной функции. Определение Дирихле предвосхищает более позднее определение Жордана непрерывной кривой (пути) с помощью непрерывных координатных функций.

Результаты Дирихле в математическом анализе относятся главным образом к теории рядов. Он ввел понятие условной сходимости ряда. Его имя носит теорема: если ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится к той же сумме и притом абсолютно. На

примерах он продемонстрировал свойство условно сходящегося ряда, выражаемое теоремой Римана: для любого числа существует перестановка условно сходящегося ряда, имеющая суммой это число. Для числовых рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ Дирихле доказал признак сходимости, который носит его имя (признак опубликован в 1862 году). Дирихле первым в работе 1829 г. поставил на прочную основу вопрос о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье и сходимости этого ряда. Здесь он получил представление частичной суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ в виде интеграла Дирихле $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$,

где $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$ – ядро Дирихле, и доказал теорему о сходимости ряда Фурье, предполагая, что $f(x)$ является 2π-периодической, кусочно-непрерывной и имеет конечное число экстремумов на $[-\pi,\pi]$. В доказательстве он использовал интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, также называемый интегралом Дирихле, хотя впервые этот интеграл вычислил Эйлер в 1781 г. без строгого обоснования, как и у Дирихле. На эту нестрогость обратил внимание Лобачевский, который в своей работе 1835 г. доказал теорему о сходимости ряда Фурье при иных условиях на функцию $f(x)$, см. выше с. 163. В 1881 г. французский математик К. Жордан (1838–1922) обобщил теорему Дирихле о сходимости ряда Фурье на случай 2π-периодической функции ограниченной вариации (признак Дирихле–Жордана). Заметим, что кусочно-монотонные функции, которыми фактически пользовался Дирихле, являются подклассом функций ограниченной вариации.

Исследование сходимости рядов Фурье привело к необходимости уточнения понятия функции, выделения класса непрерывных функций и использованию разрывных функций.

Линия на отделение интегрирования от дифференцирования впервые четко проводится в лекциях Дирихле по анализу, читанных в 1854 году. Он констатирует, что непрерывные функции ведут себя по-разному в отношении интегрирования и дифференцирования: они интегрируемы, но могут не иметь производной. Там он приводит пример всюду непрерывной функции

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0, \end{cases}$$

не имеющей производной в точке $x=0$. Более того, он утверждает, что графически можно задать непрерывные функции, которые нигде не имеют производной (пример Больцано такой функции, построенный около 1834 г., еще не был известен). Дирихле делает вывод, что вопреки обычаю рассматривать интегрирование как обращение дифференцирования «многое говорит за то, чтобы оба понятия – интеграл и производную – обосновывать полностью самостоятельно». Исходя из определения интеграла как предела интегральных сумм, Дирихле доказывает некоторые его свойства и вычисляет, например, $\int_a^b x^k\,dx$ по определению, а не с помощью равенства $\left(\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right)'=x^k$.

Лекции Дирихле по определенным интегралам были изданы после его смерти.

В работе 1829 г. Дирихле приводит свой знаменитый пример всюду разрывной функции в виде: «положим $\varphi(x)$ равной некоторой определенной постоянной c, когда x получает рациональные значения, и равной другой постоянной d, когда x получает

иррациональные значения». Он отмечает, что эта функция не интегрируема и поэтому не может быть разложена в ряд Фурье. Позже эту функцию Дирихле стали приводить при $c=1$, $d=0$.

В теории аналитических функций задачей Дирихле называется задача отыскания регулярной в области G гармонической функции u, которая на границе области G совпадает с заданной непрерывной функцией φ. В математической физике это задача Дирихле, или первая краевая задача: найти регулярное в области G решение эллиптического уравнения 2-го порядка с частными производными, совпадающее на границе области с заданной функцией φ. Простейшим примером такого уравнения является уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Вопросы, связанные с этой краевой задачей, впервые рассматривали Гаусс (1840) и Дирихле (1850).

Принципом Дирихле в математической физике называют метод решения краевых задач для эллиптических уравнений с частными производными сведением этих задач к вариационным задачам на отыскание минимума некоторых функционалов в соответствующих классах функций. В узком смысле этот принцип означает отыскание решения $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ краевой задачи

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \qquad u\big|_{\partial G} = \varphi,$$

в области G с границей ∂G сведением этой задачи к задаче отыскания минимума интеграла Дирихле

$$D(u) = \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dG \qquad \text{(интеграл энергии)}$$

при условиях $D(u) < +\infty$, $u\big|_{\partial G} = \varphi$. Подобную идею до Дирихле в других ситуациях использовали Гаусс и Томсон, а впервые в таком виде при $n=3$ метод изложен в лекциях Дирихле по теории потенциала. Но изложение Дирихле этого принципа было неполным, т. к. даже не ставился вопрос о существовании решения задачи в классе допустимых

функций. Риман, ученик Дирихле, использовал в специфических условиях этот метод в своей докторской диссертации в 1851 г. и назвал его «принципом Дирихле». С критикой этого принципа выступил Вейерштрасс, указавший, что без дополнительного исследования нельзя утверждать о гладкости функции, на которой достигается минимум интеграла Дирихле. Доверие к принципу Дирихле было подорвано, а восстановлено только в начале XX в. знаменитым немецким математиком Д. Гильбертом, который строго обосновал этот принцип, получивший дальнейшее развитие в работах советского математика С. Л. Соболева.

Лекции Дирихле и его работы оказали большое влияние на математиков и в первую очередь на Римана, а методы и результаты Дирихле, особенно в теории чисел, получили далеко идущие обобщения в XIX–XX веках. Ф. Клейн следующим образом характеризует стиль и личные качества Дирихле: «Внутренне ясно увиденные им вещи он умел настолько убедительно излагать, пользуясь одними только языковыми средствами, что они казались совершенно естественным образом вытекающими из порождающих причин… В противоположность весьма активному и грубому Якоби, с которым его со студенческой скамьи связывала многолетняя дружба, Дирихле был натурой более созерцательной, сдержанной и даже почти робкой. Единственной целью, к которой он стремился всем своим существом, было уяснение идеальных связей, существующих в математическом мышлении; ради достижения этой цели он охотно отказывался от внешних эффектов и успеха. Как это часто случается с тихими, ищущими и находящими удовлетворение в самих себе людьми, судьба поставила его в агрессивное, прочно ориентированное на внешний мир окружение. Дирихле породнился с богатым, изобретательным домом Мендельсонов, женившись на Ревекке, одной из сестер Феликса Мендельсона [выдающегося немецкого композитора]… Этот дом был одним из самых блистательных центров

всяческого рода дружеского общения, … госпоже Дирихле удалось собрать вокруг себя оживленное изысканное общество, объединявшее всех интересующихся наукой и искусством. Рассказывают, что участие Дирихле во всех мероприятиях, устраивавшихся в их доме, было очень сдержанным и скромным» [140, с. 113, 116–117].

О Дирихле: [140, с. 113–117; 107, с. 152–160; 197, т. 2, с. 178–194; 15, с. 188; 20, с. 105–106].

—— Гамильтон ——

Выдающийся ирландский математик **Уильям Роуен Гамильтон (1805–1865)** родился в Дублине, отличался необыкновенно ранним развитием: в 12 лет он уже знал 12 языков. В раннем возрасте самостоятельно изучал «Начала» Евклида, труды Ньютона и «Небесную механику» Лапласа. В 1823 г. он поступает в Тринити-колледж Дублинского университета. В 1827 г. Гамильтон представляет Ирландской королевской академии свою первую и весьма глубокую работу по геометрической и волновой оптике «Теория систем лучей» и в том же году, еще не закончив обучения, получает должность королевского астронома Ирландии – директора астрономической обсерватории и профессора астрономии университета. Эти должности он исполняет до конца жизни. В 30-х гг. XIX в. Гамильтон продолжает заниматься оптикой, а свои результаты переносит на аналитическую механику движения материальных точек, используя вариационный принцип Ферма распространения света и продолжая исследования Лагранжа в механике, записавшего в 1809 г. уравнения движения планет в канонической форме.

Две работы (1834 и 1835 гг.) по аналитической механике принесли Гамильтону особенную славу. В первой из них он развивает оригинальную идею – рассматривает интеграл, фигурирующий в принципе наименьшего действия, как функцию от пределов

интегрирования и получает дифференциальные уравнения для так называемой характеристической функции задачи. Главным результатом второй работы был вывод гамильтоновой, или канонической, системы уравнений динамики. Гамильтон получил ее, упростив систему уравнений Лагранжа путем перехода от обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha$ к обобщенным импульсам p_α и введения функции Гамильтона. (См. выше запись системы Гамильтона в конце очерка о Якоби.) Интегрированием этой системы позже занимались Якоби и Остроградский. Система Гамильтона играет большую роль в аналитической механике.

Важные результаты Гамильтон получил и в алгебре. В работе 1835 г., опубликованной в 1837 г., он дал чисто алгебраическое изложение теории комплексных чисел как пар действительных чисел с определенными правилами действий над этими парами, оно входит и в современные учебники алгебры. Гамильтон одновременно с английским математиком А. Кэли занимался теорией матриц. Теорема Гамильтона–Кэли утверждает: всякая квадратная матрица A порядка n удовлетворяет своему характеристическому уравнению $\det(A-\lambda E)=0$, где E – единичная матрица порядка n. Гамильтон доказал ее в работе 1853 г. при $n=2,3$. Кэли в работе 1858 г. сформулировал теорему в общем виде и привел доказательство при $n=2,3$.

Занимаясь поисками гиперкомплексных чисел, не являющихся делителями нуля, Гамильтон в 1843 г. открыл кватернионы, и это произвело огромное впечатление на математиков, особенно британских. Кватернионы – это числа вида $q=a+bi+cj+dk$, где a,b,c,d – действительные числа, а единицы $1,i,j,k$ удовлетворяют соотношениям

$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad ij=-ji=k,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j.$$

Можно определить для кватерниона q сопряженный к нему кватернион $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ и проверить, что $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Число $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ называется модулем кватерниона q. Если q_1 и q_2 – кватернионы, то $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$, это подтверждает аналогию между кватернионами и комплексными числами. Число $N = |q|^2$ называется нормой кватерниона q, причем $N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$. Обратным к кватерниону q является кватернион $|q|^{-2}\,\overline{q}$. Операция умножения кватернионов некоммутативна, но она является ассоциативной (сам термин «ассоциативность» был введен Гамильтоном в связи с кватернионами в работе 1843 г., а термины «коммутативность» и «дистрибутивность» ввел французский математик Ф. Ж. Сервуа в 1815 году).

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ представляет собой одновременно тело и линейное пространство над полем скаляров. (Тело отличается от поля лишь тем, что не обладает коммутативностью.) Алгебра кватернионов – это 4-мерная алгебра с базисом $1, i, j, k$. Исторически это был первый пример некоммутативной алгебры с делением. В алгебре кватернионов можно ввести евклидову метрику, считая за расстояние между кватернионами p и q модуль $|p - q|$ их разности.

В работе 1845 г. Гамильтон дает понятие вектора (из понятия кватерниона при $a = 0$) и сам термин «вектор», а также выражения для скалярного и векторного произведений. Термин «вектор» образован от латинского слова *vector* – «несущий». Умножение двух векторов $\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ как кватернионов дает

$$(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) +$$
$$+(a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k = -(\alpha, \beta) + [\alpha, \beta],$$

где (α,β) – скалярное произведение векторов α и β, а $[\alpha,\beta]$ – векторное. Так назвал эти произведения американский физик и математик Дж. У. Гиббс (1839–1903) в своих лекциях «Элементы векторного анализа», опубликованных в 1881–1884 годах. Он обозначает векторы греческими буквами, а скалярное и векторное произведения векторов α и β соответственно через $\alpha\cdot\beta$ и $\alpha\times\beta$.

Большое значение для возникновения векторного анализа имело введение Гамильтоном в 1853 г. дифференциального оператора $\nabla = i\dfrac{\partial}{\partial x} + j\dfrac{\partial}{\partial y} + k\dfrac{\partial}{\partial z}$, названного позже термином «набла» – от названия древнего музыкального инструмента типа арфы, имевшего треугольную форму. Применение оператора ∇ к скалярной функции $u(x,y,z)$ дает градиент $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}i + \dfrac{\partial u}{\partial y}j + \dfrac{\partial u}{\partial z}k = \nabla u$, а к векторной функции $F = Pi + Qj + Rk$ – дивергенцию $\operatorname{div} F = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, F)$ и ротор $\operatorname{rot} F = [\nabla, F]$. Термин «градиент» (от латинского *gradiens* – «идущий») и обозначение $\operatorname{grad} F$ дал английский физик и механик Дж. К. Максвелл (1831–1879), позаимствовав его из метеорологии, где это понятие использовалось для обозначения направления наиболее быстрого изменения функции. Максвелл называл дивергенцию «конвергенцией», а английский математик У. К. Клиффорд (1845–1879) дал термин «дивергенция» (от латинского *divergentia* – «расходимость»). Операторы, выражающие дивергенцию и ротор, использовал уже в 1849 г. английский математик, механик и физик Дж. Г. Стокс (1819–1903), а термин «ротор» (от латинского *rotaro* – «вращать») предложил Клиффорд. Максвелл обозначал ротор английским словом curl («локон», «завиток»), но употреблял и обозначение rot. Особенная важность операторов rot и div для физических приложений выяснилась в

работах Максвелла 1855–1856 гг. и в работе 1873 г., где он вывел свои знаменитые уравнения теории электромагнитного поля. О математических терминах см. [23].

Последние 25 лет своей жизни Гамильтон пытался осуществить свою программу построения для кватернионов аналогов теорий, использующих комплексные числа в алгебре и теории функций. Свои результаты он изложил в «Лекциях о кватернионах» (1853) и «Элементах теории кватернионов» (1866). В то время в британских вузах теория кватернионов была обязательным предметом обучения. Гамильтон и его ученики явно преувеличивали роль кватернионов в будущем развитии математики. По словам немецкого математика Ф. Клейна (1849–1925), в Германии кватернионы «встречали упорное сопротивление со стороны большинства математиков, пока они все-таки кружным путем, через физику, не проникли в виде векторного анализа, необходимого в первую очередь в динамике» [140, с. 207]. Ф. Клейн пишет: «Как мне рассказывали в Дублине, в свои последние годы он [Гамильтон] вел себя странно, чтобы не сказать безумно» [140, с. 206]. О Гамильтоне: [140, с. 205–227; 250; 107, с. 72–74; 108, с. 55–57; 109, с. 191–193; 15, с. 127–128].

В работе «Об эллиптических функциях Якоби и о кватернионах» (1845) английский математик Артур Кэли (1821–1895) привел обобщение кватернионов – октавы (от латинского *octo* – «восемь»). В 1843 г. их открыл ирландский математик Джон Гревс. Алгебру октав обычно называют алгеброй Кэли и обозначают $\mathbb{H}^2$. Это 8-мерная алгебра, ее элементы записываются в виде

$$\xi = a + bi + cj + dk + Ae + BI + CJ + DK\ ,$$

а умножение ее восьми единиц $1, i, j, k, e, I, J, K$ производится по определенной схеме. Алгебры кватернионов и октав относятся к разделу алгебры – некоммутативной алгебре, получившей дальнейшее развитие во второй половине XIX в. и в XX в.

ЛИТЕРАТУРА

а) **общая для всех периодов развития математики**

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3-х т. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970–1971. – Т. 1–3.
2. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Сост. И. Г. Башмакова и др.; под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 320 с.
3. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ. Теория вероятностей / Сост. И. Г. Башмакова и др.; под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.
4. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. Вып. 1–4. – М.; Л.: ГТТИ, 1932; 2-е изд. – М.; Л.: ОНТИ, 1935.
5. Рыбников К. А. История математики. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 454 с.
6. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. – М.: Просвещение, 1987. – 160 с.
7. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. И. Б. Погребысского. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 254 с.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 291 с.
9. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.
10. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. – Минск: Вышэйшая шк., 1974. – 367 с.
11. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. – М.: Учпедгиз, 1940. – 179 с.
12. Глейзер Г. И. История математики в школе: пособие для учителей: в 3-х кн. – М.: Просвещение, 1981–1983.
13. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 848 с.
14. Боголюбов А. Н. Математики, механики: биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 639 с.

15. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: биографический словарь-справочник. – К.: Рад. шк., 1987. – 656 с.
16. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 608 с.
17. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Рад. шк., 1973. – 552 с.
18. Конфорович А. Г. Колумби математики. – К.: Рад. шк., 1982. – 224 с.
19. Чистяков В. Д. Рассказы о математиках. – Минск: Вышэйшая шк., 1966. – 409 с.
20. Крысицкий В. и др. Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970. – 187 с.
21. Историко-математические исследования. – М.: Наука. (Сборники выходили в 1948–2002 гг.)
22. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
23. Александрова Н. В. Математические термины. – М.: Высшая шк., 1978. – 189 с.

б) к периодам древности и средних веков

24. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.
25. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: ГИТТЛ, 1967. – 368 с.
26. Нейгебауэр О. Точные науки в древности. – М.: Наука, 1968. – 224 с.
27. Кольман Э. История математики в древности. – М.: Физматгиз, 1961. – 235 с.
28. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. – М.; Л.: ГТТИ, 1932 (1938). – 230 с.
29. Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I / Подготовил А. В. Лебедев. – М.: Наука, 1989. – §§ 11, 14, 18, 29, 42, 43, 58.
30. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. – [21], 1958. – Вып. 11. – С. 225–438.
31. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. – Л.: Наука, 1990. – 192 с.
32. Боро В. и др. Живые числа: Пять экскурсий. – М.: Мир, 1985. – 128 с.
33. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. – М.: Учпедгиз, 1963. – 96 с.

34. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М.: Наука, 1992. – 80 с.
35. Зубов В. П. Аристотель. – М.: Наука, 1963. – 366 с.
36. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
37. Лурье С. Я. Архимед. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 271 с.
38. Башмакова И. Г. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
39. Башмакова И. Г. Диофант Александрийский и его «Арифметика» // Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – С. 5–27.
40. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
41. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
42. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980. – 311 с.
43. Юшкевич А. П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961. – 448 с.
44. Володарский А. П. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977. – 183 с.
45. Володарский А. П. Ариабхата. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
46. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII–XVII вв.): в 3-х кн. – М.: Наука, 1983. – Кн. 1–3.
47. Матвиевская Г. П. Очерки по истории тригонометрии. – Ташкент: Фан, 1990. – 160 с.
48. Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: сборник статей к 1200-летию со дня рождения. – М.: Наука. 1983. – 264 с.
49. Кедров Б. М., Розенфельд Б. А. Абу Рейхан Бируни. – М.: Наука, 1973. – 55 с.
50. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. – М.: Наука, 1965. – 191 с.
51. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.
52. Симонов Р. А. Кирик Новгородец. – М.: Наука, 1980. – 112 с.
53. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, 1971. – 216 с.
54. Гребеников Е. А. Николай Коперник. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 147 с.
55. Белый Ю. А. Иоганн Мюллер (Региомантан). – М.: Наука, 1985. – 128 с.
56. Гутер Р. С, Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980. – 192 с.

57. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI–XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

58. Никифоровский В. А. В мире уравнений. – М.: Наука, 1987. – 173 с.

в) к истории математики в Новое время

59. Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. – М.: Знание, 1985. – 48 с.

60. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2-х т. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – С. 411–433; 1956. – Т. 2. – С.176–178, 291–293, 356, 424–456. (Здесь содержатся очерки о возникновении и развитии математического анализа.)

61. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. – М.; Л.: ГТТИ, 1933 (1938). – 430 с.

62. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. – Х.: Изд-во ХГУ им. А. М. Горького, 1952. – 32 с.

63. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джон Непер (1550–1617). – М.: Наука, 1980. – 224 с.

64. Белый Ю. А. Иоганн Кеплер (1571–1630). – М.: Наука, 1971. – 296 с.

65. Кузнецов Б. Г. Галилей. – М.: Наука, 1964. – 326 с.

66. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1938. – 296 с.

67. Матвиевская Г. П. Рене Декарт. – М.: Наука, 1976. – 271 с.

68. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. – М.: Наука, 1992. – 320 с.

69. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: Наука, 1966. – 506 с.

70. Замечательные ученые / Под ред. С. П. Капицы. – М.: Наука, 1980. – 192 с.

71. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. – 192 с.

72. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. – М.: Наука, 1976. – 300 с.

73. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 256 с.

74. Белл Э. Т. Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

75. Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. – М.: Мысль, 1971. – 430 с.

76. Тарасов Б. М. Паскаль. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 334 с.

77. Конфорович А. Г. У пошуках інтеграла. – К.: Рад. шк., 1990. – 256 с.
78. Никифоровский В. А. Путь к интегралу. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
79. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
80. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1966. – 208 с.
81. Франкфурт У. И., Френк А. М. Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 327 с.
82. Вавилов С. И. Исаак Ньютон (1643–1727). – М.: Наука, 1989. – 272 с.
83. Карцев В. П. Ньютон. – М.: Мол. гвардия, 1987. – 416 с.
84. Исаак Ньютон: сб. статей к 300-летию со дня рожд. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943.
85. Юшкевич А. П. О математических рукописях Ньютона. – [21], 1977. – Вып. 22. – С. 127–192.
86. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989. – 96 с.
87. Погребысский И. Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1644–1716). – М.: Наука, 1971. – 320 с.
88. Юшкевич А. П. Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых // Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3, вып. 1(23). – С. 150–164. Там же: Избранные отрывки из матем. сочинений Лейбница / Сост. и пер. А. П. Юшкевич. – С. 165–204.
89. Лопиталь Г. Ф. де. Анализ бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1935. – 432 с.
90. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 177 с.
91. Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли (1700–1782). – М.: Наука, 1981. – 319 с.
92. Тиле Р. Леонард Эйлер. – К.: Вища шк., 1983. – 192 с.
93. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
94. Котек В. В. Леонард Ейлер. – К.: Рад. шк., 1957. – 84 с.
95. Леонард Эйлер: сб., посв. 250-летию со дня рожд. / Под ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. – М.: Наука, 1958.– 610 с.
96. Леонард Эйлер: сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти / Под ред. А. М. Деборина. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. – 239 с.
97. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука: сб. статей / Под ред. Н. Н. Боголюбова, Г. К. Михайлова, А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1988. – 519 с.
98. Добровольский В. А. Д'Аламбер. – М.: Знание, 1968. – 31 с.

99. Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). – М.: Наука, 1977. – 224 с.

100. Жозеф Луи Лагранж: сб. статей к 200-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1937. – 559 с.

101. О квадратуре круга / Сост. Ф. Рудио; пер. с нем.; под ред. и с примеч. С. Н. Бернштейна. – 3-е изд. – М.; Л.: Научтехиздат, 1936. – 235 с.

102. Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1936.

103. Воронцов-Вельяминов Б. А. Лаплас. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

104. Боголюбов А. Н. Гаспар Монж (1746–1818). – М.: Наука, 1978. – 184 с.

105. Стройк Д. Я. Очерки истории дифференциальной геометрии до XX ст. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. – 80 с.

106. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII в. и начале XIX в. – М.: Учпедгиз, 1963. – 262 с.

107. Математика XIX в.: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978. – 255 с.

108. Математика XIX в.: Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981. – 269 с.

109. Математика XIX в.: Чебышёвское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1987. – 318 с.

110. Бюлер В. Гаусс. – М.: Наука, 1989. – 208 с.

111. Карл Фридрих Гаусс: сб. статей к 100-летию со дня смерти / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 311 с.

112. Кольман Э. Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 224 с.

113. Добровольский В. А. Юность и зрелость Коши // Матем. в школе: Педагогика. – 1989. – № 6. – С. 2, 146–149.

114. Молодший В. Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века. – [21], 1978. – Вып. 23. – С. 32–55.

115. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М.: Физматгиз, 1966. – 343 с.

116. Дальма А. Эварист Галуа – революционер и математик. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 112 с.

117. Инфельд Л. Эварист Галуа: Избранник богов. – М.: Мол. гвардия, 1965. – 352 с.

118. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука,

1968. – 591 с.
119. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. – 247 с.
120. История отечественной математики: в 4-х т., 5-ти кн. / Под ред. И. З. Што-кало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 1–4.
121. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 304 с.
122. Каган В. Ф. Лобачевский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 506 с.
123. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. – М.: Просвещение, 1976. – 112 с.
124. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
125. Конфорович А. Г., Сорока М. О. Остроградський. – К.: Молодь, 1980. – 216 с.
126. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышёв. – Л.: Наука, 1976. – 282 с.
127. Демьянов В. П. Рыцарь точного знания. – М.: Знание, 1991. – 192 с.
128. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышёв: биографический очерк. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944. – 31 с.
129. Монастырский М. И. Бернхард Риман. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
130. Юшкевич А. П. Развитие понятия предела до Вейерштрасса. – [21], 1986. – Вып. 30 . – С. 11–76.
131. Дорофеева Л. В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
132. Кочина П. Я. Карл Вейерштрасс (1815–1897). – М.: Наука, 1985. – 271 с.
133. Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891). – М.: Наука, 1981. – 312 с.
134. Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. – М.: Мол. гвардия, 1959. – 336 с.
135. Юшкевич А. П. О развитии понятия функции. – [21], 1966. – Вып. 17. – С. 123–150. (См. и статью Н. Н. Лузина «Функция» в [13]. – С. 797–804)
136. Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. – 127 с.
137. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
138. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.
139. Яглом И. М. Феликс Клейн и Софус Ли. – М.: Знание, 1977. – 64 с.
140. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 455 с.
141. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х т. – М.:

Наука, 1987. – Т. 1: Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с.; Т. 2: Геометрия. – 416 с.
142. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит (1822–1901). – Л.: Наука, 1982. – 288 с.
143. Пуркерт В., Ильгаудс Х. И. Георг Кантор. – Х.: Основа, 1991. – 128 с.
144. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.
145. Медведев Ф. А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. – М.: Наука, 1976. – 231 с.
146. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 160 с.
147. Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. – М.: Наука, 1983. – 161 с.
148. Бурова И. Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки. – М.: Наука, 1987. – 134 с.
149. Конфорович А. Г. Нескінченність у математиці. – К.: Рад. шк., 1978. – 94 с.
150. Пархоменко А. С. Что такое линия. – М.: Гостехиздат, 1954. – 142 с.
151. Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 416 с.
152. Панов М. П., Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре и наука начала XX века // Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 522–559.
153. Цыкало А. Л. Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918). – М.: Наука, 1988. – 248 с.
154. Шибанов А. С. Александр Михайлович Ляпунов. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 336 с.
155. Юшкевич А. П. Исторический очерк // Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 428–458.
156. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.
157. Григорьян А. Т. Механика от античности до наших дней. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
158. Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с.
159. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Наука, 1970. – 520 с.
160. Майстров Л. Е. Теория вероятностей: ист. очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
161. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980. – 274 с.
162. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном. – М.: Знание, 1981. – 64 с.

163. Игнациус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926). – М.: Наука, 1967. – 212 с.

164. Тумаков И. М. Анри Леон Лебег. – М.: Наука, 1975. – 119 с.

165. Полишук Е. М. Вито Вольтерра. – Л.: Наука, 1977. – 114 с.

166. Полищук Е. М. Эмиль Борель (1871–1956). – Л.: Наука, 1980. – 168 с.

167. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

168. Николай Николаевич Лузин: сб. статей к 100-летию со дня рожд. / Сост. П. И. Кузнецов. – М.: Знание, 1983. – 64 с.

169. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. – М.: Наука, 1968. – 112 с.

170. Кравчук М. П. Математика та математики в Київському ун-ті за сто років (1834–1934) // Розвиток науки в Київському ун-ті за сто років. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1935. – С. 34–69.

171. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 150 с.

172. Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років радянської влади. – К.: Вид-во АН УРСР, 1958. – 83 с.

173. Ученые записки матем. отделения физ.-мат. ф-та и Харьк. матем. об-ва, посв. 150-летию ун-та. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1956. – Т. 24, серия 4. – 116 с.

174. Бородин А. И. Советские математики. – К.; Донецк: Вища шк., 1982. – 133 с.

175. Очерки развития математики в СССР (1917–1971). Теоретическая математика. Прикладные вопросы математики / А. Н. Боголюбов, И. З. Штокало, А. П. Юшкевич и др.; отв. ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1983. – 736 с.

176. Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: 1966. – 276 с.

177. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с. (Первые две главы содержат исторические сведения.)

178. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – 47 с.

179. Клайн М. Математика: Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 447 с.

180. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики. – М.: Знание, 1968. – 48 с.

181. Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1955. – 72 с.

182. Яглом И. М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967. – 48 с.

183. Вейль Г. О философии математики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 128 с.

184. Марков А. А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1972. – 48 с.

185. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975. – 256 с.

186. Дьедонне Ж. Дело Никола Бурбаки // Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С. 44–45.

187. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 18 с. (То же в [8]. – С. 245–259)

188. Закономерности развития современной математики: Методологические аспекты / Отв. ред. М. И. Панов. – М.: Наука, 1987. – 236 с.

189. Українська математична бібліографія / Відп. ред. Й. З. Штокало.– К.: Вид-во АН УРСР, 1963. – 384 с.

190. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.

191. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983. – 62 с.

192. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Чарльз Бэббедж. – М.: Знание, 1973. – 64 с.

193. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. – М.: Знание, 1975. – 192 с.

194. Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Вища шк., 1988. – 232 с.

195. Об основаниях геометрии: сб. классич. работ по геометрии Лобачевского / Ред. и вступит. статья А. П. Нордена. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 528 с.

196. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.

197. Математическая энциклопедия: в 5-ти т. / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Сов. энцикл., 1977–1985. – Т. 1–5.

198. Биографический словарь деятелей естествознания и техники: в 2-х т. / Отв. ред. А. А. Зворыкин. – М.: Изд-во БСЭ, 1958–1959. – Т. 1–2.

199. Математика в СССР за тридцать лет (1917–1947) / Под ред. А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского. – М.: Физматгиз, 1948. – 1044 с.

200. Математика в СССР за сорок лет (1917–1957): в 2-х т. / Гл. ред. А. Г. Курош. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 1002 с.; Т. 2. – 820 с.

201. Математика в СССР (1958–1967): в 2-х т. / Отв. ред. С. В. Фомин, Г. Е. Шилов. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 820 с.; 1970. – Т. 2. – С. 821–1579.

202. Механіко-математичному факультету – 60 (Київський національний ун-т ім. Т. Шевченка). – К., 2000. – 248 с.
203. Очерк истории теории вероятностей // Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – С. 289–321.
204. Добровольский В. А. Основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1980. – 64 с.
205. Добровольский В. А. Василий Петрович Ермаков. – М.: Наука, 1981. – 89 с.
206. Добровольський В. О. Михайло Васильович Остроградський: Нарис життя та діяльності. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2001. – 88 с.
207. Михайло Васильович Остроградський в оцінках сучасників та нащадків: (До 200-річчя з дня народження) / Уклад. Б. П. Зайцев, С. І. Посохов, В. Д. Прокопова. – Х.: НМЦ «СД», 2001. – 96 с.
208. Вчені вузів Одеси: бібліографічний довідник. Вип. 1. Природничі науки (1865–1945). Ч. 2. Математики. Механіки / Упоряд. І. Е. Рикун. – Одеса, 1995. – 176 с.
209. Крехівський В. В., Мартинюк В. Т., Лавренчук В. П. З історії математичного факультету Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 1998. – 19 с.
210. Рыжий В. С. История математики. Ч. 1. Математика в древности и в средние века (Пособие для самообразования). – Х.: Изд-во ХНУ им. В. Н. Каразина, 2003. – 115 с.
211. Біографічний словник науковців (1934–2004). – К.: Ін-т матем. НАН України, 2004. –124 с.
212. Колмогоров в воспоминаниях учеников / Ред.-сост. А. Н. Ширяев, подг. текста Н. Г. Химченко. – М.: МЦНМО, 2006. – 472 с.
213. Китчер Ф. и др. Методологический анализ оснований математики: сб. статей / Отв. ред. М. И. Панов. – М.: Наука, 1988. –175 с.
214. Лишевский В.П. Охотники за истиной: Рассказы о творцах науки. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
215. Ньютон И. Математические работы / Перевод с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 452 с.
216. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод с лат. и комментарии А. Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
217. Ворович И. И. Лекции по динамике Ньютона: Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004. – 680 с.
218. Гродзенский С. Я. Андрей Андреевич Марков (1856–1922). – М.: Наука, 1987. – 257 с.

219. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин (1894–1919). – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 156 с.

220. Добровольская Э. М. Развитие теории цепных дробей в XVII–XVIII вв.: автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. – М. : 1992. – 17 с.

221. Добровольский В. О., Котек В. В. Роботи з історії математики на Україні за 110 років (1850–1960) // Історико-математичний збірник. – К., 1963. – Вип. 4. – С. 10–36.

222. Вирченко Н. А., Добровольский В. А., Митропольский Ю. А., Смогоржевский А. С. Михаил Филиппович Кравчук (к 75-летию со дня рождения) // Укр. матем. журнал, 1968. – Т. 20, № 1. – С. 85–91.

223. Добровольский В. О. М. П. Кравчук – український математик // Українознавство. – 2002. – С. 242–256.

224. Добровольский В. А. Огюстен Луи Коши (к 200-летию со дня рожд.) // Юбилеи науки. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 3–8.

225. Галай Г. І., Гриневич Г. Д. Учням про видатних математиків / За ред. доктора фіз.-мат. наук, проф. М. І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1976. – 160 с.

226. Віктор Якович Буняковський: зб. до 200-річчя з дня народження / Ред. Г. Сита, М. Горбачук, А. Юрачківський. – К.: Ін-т математики НАН України, 2004. – 206 с.

227. Прудников В. Е. В. Я. Буняковский – ученый и педагог. – М.: Учпедгиз, 1954. – 88 с.

228. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев (1847–1878). – М.; Л.: Наука, 1966. – 141 с.

229. Йорн Штойдінг. Внесок Вороного в сучасну теорію чисел // Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному викладі. – К.: Ін-т математики НАН України, 2009. – 90 с.

230. Георгій Вороний: Вчений, який випередив час на століття. – К.: Ін-т математика НАН України, 2010. – 68 с.

231. Урбанский В. М. Михаил Филиппович Кравчук. – М.: Наука, 2002. – 203 с.

232. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К.: Науковий світ, 2010. – 240 с.

233. Вірченко Н. О. Велет української математики. – К.: Науковий світ, 2012. – 64 с.

234. Рыжий В. С., Николенко И. Г. История математики. Ч. 2. Математика в XVII и XVIII веках. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2011. – 286 с.

235. Гроссман Л. Математическая Одесса. Кн. 1. – Одесса: Optimum, 2011. – 131 с., ил.

236. Вірченко Н. Зернини з доріг життя мого… (Спомини). – К.: Задруга, 2011. – 760 с., іл.
237. Добровольський В. Події і факти: біографічні нариси. – К.: Ін-т енцикл. досл. НАН України, 2012. – 354 с.
238. Понтрягин Л. С. Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва. – 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 320 с.
239. Кочина П. Я. Наука. Люди. Годы: Воспоминания и выступления. – М.: Наука, 1988. – 624 с.
240. Jarnik V. Bolzano and the foundations of mathematical analysis (On the occasion of bicentennial of B. Bolzano). – Prague, 1981. – 89 p.
241. Valson C.-A. La vie et les travaux du baron Cauchy. – Paris, 1868. – Vol. 1–2.
242. Belhost B. Cauchy (1789–1857). – Paris, 1985.
243. Рыжий В. С., Николенко И. Г. История математики в 2 ч. Ч. 1: Математика в древности и в средние века. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 184 с., ил.
244. Больаи Я. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида / Пер. и примеч. В. Ф. Кагана. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 243 с.
245. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: ГТТИ, 1952. – 332 с.
246. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Знание, 1984. – 64 с.
247. История механики в России / Отв. ред. А. Н. Боголюбов, И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1987. – 392 с.
248. Боголюбов А. Н. Жан Виктор Понселе. – М.: Наука, 1988. – 227 с.
249. Лавринович К. К. Фридрих Вильгельм Бессель. – М.: Наука, 1989. – 319 с.
250. Полак Л. С. Уильям Гамильтон (1805–1865). – М.: Наука, 1993. – 267 с.
251. Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б. Фердинанд Миндинг (1806–1885). – Л., 1970. – 224 с.
252. Реньи А. Трилогия о математике / Пер. с венг. – М.: Мир, 1980. – 376 с.
253. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. – М., 1883. – Т. 1, 2.
254. Клайн М. Математика: Поиск истины / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 296 с.
255. Маркушевич А. И. Замечательные синусы: Введенияв теорию эллиптических функций. – М.: Наука, 1965. – 92 с.

256. Маркушевич А. И. Некоторые вопросы истории теории аналитических функций. – [21], 1980. – Вып. 25. – С. 52–70.
257. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1962. – 312 с.
258. Риман Б. Сочинения. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 543 с. / Со вступит. статьей В. Л. Гончарова «О научных работах Римана».
259. Научное наследие П. Л. Чебышёва: сб. статей. – Вып. 1. Математика. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1955. – 174 с.
260. Ахиезер Н. И. П. Л. Чебышёв и его научное наследие // П. Л. Чебышёв. Избр. труды. – М., 1955. – С. 843–877.
261. Делоне Б. Н. Петербургская школа теория чисел. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – 1947. – 422 с.
262. Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин (1837–1908). – Л.: Наука, 1968. – 148 с.
263. Кеджори Ф. История элементарной математики / Пер. с англ. с дополн. И. Ю. Тимченко. – 2-е изд. – Одесса: Матезис, 1917. – 478 с.
264. Александров П. С. Пуанкаре и топология // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27, вып. 1. – С. 147–158.
265. Тяпкин А. А. Об истории формирования идей специальной теории относительности // Принцип относительности: сб. статей. – М.: Атомиздат, 1973.
266. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: Наука, 1989. – 568 с.
267. Fraenkel A. Das Leben Georg Cantors // G. Cantor. Gesammelte Abhandlungen. – Berlin, 1932. – S. 452–483.
268. Медведев Ф. А. Теория абстрактных множеств Кантора и Дедекинда // Семиотика и информатика. – 1983. – Вып. 22. – С. 45–80.
269. Кантор Г. Труды по теории множеств / Послесловие А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1985. – С. 373–388.
270. Петрова С. С. О. Хевисайд и развитие символического исчисления. – [21], 1985. – Вып. 28. – С. 98–122.
271. Проблемы Гильберта: сб. / Под общ. ред. П. С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
272. Ханович И. Г. Академик Александр Николаевич Крылов. – Л.: Наука, 1967. – 251 с.
273. Михайло Васильович Остроградський (до 200-річчя з дня народження) / Ред. А. М. Самойленко, Г. М. Сита. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – 128 с.
274. Георгій Вороний та його родинне оточення: зб. статей / Ред. Г. М. Сита. –

Чернігів: Десна Поліграф, 2012. – 608 с.

275. Акивис М. А. Эли Картан. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 325 с.
276. Полищук Е. М., Шапошникова Т. О. Жак Адамар (1865–1963). – Л.: Наука, 1990. – 252 с.
277. Александров П. С. Памяти Э. Нётер // Успехи матем. наук. – 1936. – Вып. 2. – С. 255–265.
278. Стяжкин Н. И. Становление идей математической логики. – М.: Наука, 1964. – 304 с.
279. Боголюбов А. Н., Урбанский В. М. Николай Митрофанович Крылов. – К.: Наук. думка, 1987. – 175 с.
280. Ахиезер Н. И. С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. – Х.: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1955. – 112 с.
281. Отто Юльевич Шмидт: Жизнь и деятельность. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 470 с.
282. Данилов Ю. А. Джон фон Нейман. – 2-е изд. – М.: Знание, 1990. – 47 с. (Серия «Математика, кибернетика», № 12).
283. Боголюбов А. Н. Николай Николаевич Боголюбов: Жизнь. Творчество. – Дубна, 1996. – 182 с.
284. Воспоминания об академике Н. Н. Боголюбове. – М.: МИАН, 2009. – 177 с.
285. Вейль Г. Полвека математики. – М.: Знание, 1969. – 48 с.
286. Юшкевич А. П. Математика и ее история в ретроспективе. – [188]. – С. 28–74.
287. Математика в поняттях, означеннях і термінах: в 2-х ч. / Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркін Ю. І., Федін М. Г. – Рад. шк., 1986.
288. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета (до 2011 года). – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 356 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Наукове видання

Рижий Володимир Семенович

Ніколенко Ірина Геннадіївна

НАРИСИ З ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ ПЕРШОЇ ПОЛОВИНИ XIX СТОЛІТТЯ

(Рос. мовою)

Коректор *А. І. Сєдих*

Комп'ютерне верстання *О. В. Будник*

Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 8,5. Тираж 300 пр. Зам. № 30/15.

Видавець і виготовлювач

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Тел. 705-24-32